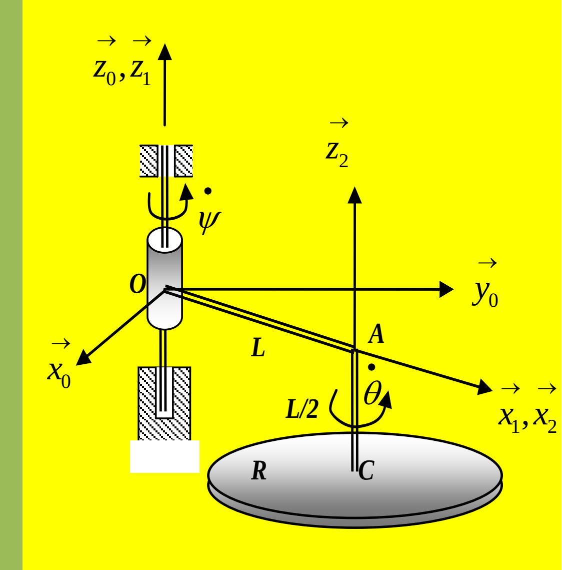
CLASSES PREPARATOIRES AUX GRANDES ECOLES

TRONC COMMUN DES UNIVERSITES (TCT)

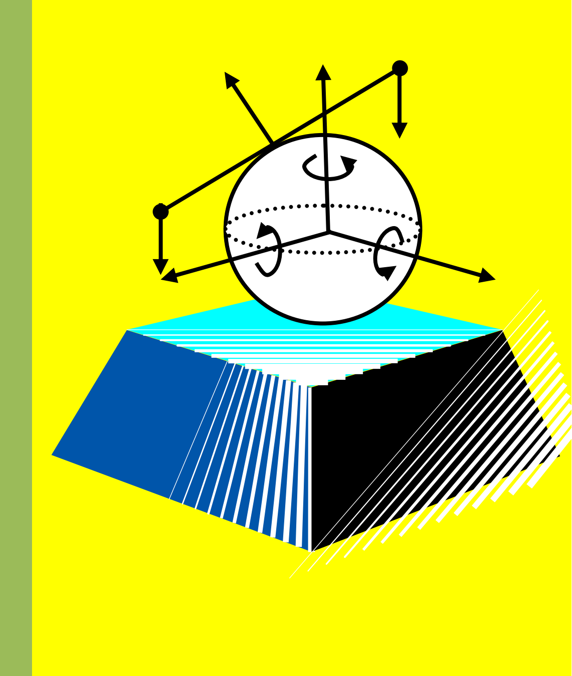
SCIENCES TECHNIQUES (ST) semestre 3 (LMD)

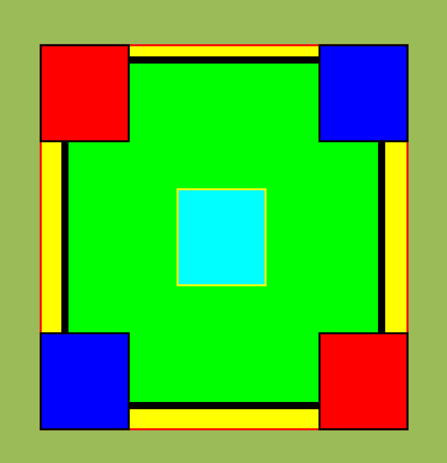


MECANIQUE RATIONNELLE

Cours & exercices résolus

Rappels sur les Vecteurs, Les Torseurs, Statique des Solides, Géométrie des Masses, Cinématique du Point et du Solide, Cinétique et Dynamique des Solides





A. KADI

UNIVERSITE M'HAMED BOUGARA - BOUMERDES

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de **deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles** et **aux étudiants du tronc commun de technologie des universités** ainsi que **les étudiants du semestre 3 des sciences techniques du système LMD**. Il contient des chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre. Les solutions sont souvent détaillées et permette à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation.

Les deux premiers chapitres traitent les outils mathématiques notamment les torseurs utilisés pour simplifier l'écriture des équations de la mécanique.

Le chapitre trois décrit l'équilibre statique des solides et les différentes liaisons entre les solides et les équations qui les régissent.

Le chapitre quatre est consacré à la géométrie des masses donc aux centres d'inertie et aux tenseurs d'inertie des solides. Savoir utiliser le théorème de Huygens permet de résoudre un bon nombre de problèmes en mécanique des solides et vibrations.

Les chapitres cinq, six et sept traitent la cinématique du point matériel et la cinématique du solide indéformables ainsi que les contacts entre les solides. Le maniement des angles d'Euler et leur assimilation sont indispensables pour la compréhension de la mécanique des solides.

Les chapitres huit et neuf décrivent la cinétique et les théorèmes fondamentaux de la dynamique et le principe de l'action et de la réaction.

Le dernier chapitre traite la dynamique des solides en mouvements de rotation autour d'un axe et de leur équilibrage statique et dynamique.

De nombreux exercices résolus dans cet ouvrage montrent aussi la manière dont il faut utiliser les théorèmes généraux de la mécanique et combien il est important de faire un bon choix des repères pour la détermination des éléments cinématiques et cinétiques des solides.

La mécanique est la science qui décrit les lois des mouvements et de l'équilibre. Elle est à la base du dimensionnement des mécanismes, des machines, des structures, des ouvrages et autres réalisations de l'homme.

J'espère que le lecteur ayant utilisé l'ouvrage pourra à la fin, en utilisant les torseurs des actions mécaniques et les différentes liaisons, écrire les équations de mouvement d'un mécanisme quelconque et résoudre le problème.

Je tiens à remercier, toutes celles et ceux qui voudrons me faire parvenir leurs critiques, remarques ainsi que leurs suggestions afin d'améliorer le contenu de cet ouvrage.

L'auteur

Email : kadikali@yahoo.fr

Préface

Quand Ali KADI m'a amicalement demandé d'écrire la préface de cet ouvrage, je n'ai pas hésité à répondre affirmativement. L'occasion qui m'est donc offerte me permet de m'adresser directement aux étudiants, aux enseignants et ingénieurs concernés par cet ouvrage. Elle me permet aussi de témoigner toute ma reconnaissance à l'auteur qui nous a offert, là, un ouvrage fort intéressant traitant d'un domaine clé des sciences de l'ingénieur, à savoir la « *cinématique et dynamique des solides indéformables* » où chaque cours est suivi d'une série d'exercices corrigés.

L'ouvrage est structuré en chapitres complémentaires les uns des autres, traitant en détail de la géométrie des masses jusqu'à la dynamique des solides en passant par les théorèmes fondamentaux de la dynamique et du principe de l'action et de la réaction. Il s'adresse aussi bien aux étudiants des deux premières années des universités, aux étudiants des classes préparatoires aux grandes écoles, ainsi qu'aux enseignants et ingénieurs. Chacun en trouvera ce dont il a besoin. L'étudiant, pour approfondir ses connaissances et aller au-delà des concepts vus aux cours. L'enseignant, pour améliorer sa source de savoir. L'ingénieur pour en faire une référence indispensable.

L'ouvrage proposé intègre un élément nouveau : l'approche méthodologique de résolution de problèmes. Corollaire d'une dizaines d'années de travail universitaire effectuée par l'auteur, l'approche est construite avec le souci constant de proposer des exercices corrigés à difficulté croissante, permettant la maîtrise graduelle des principes directeurs du cours.

Enfin, l'heureuse idée d'avoir inclut au début de l'ouvrage une sélection des principaux outils mathématiques connexes à la compréhension de la science mécanique, ne peut que renforcer la notoriété de cet ouvrage.

Professeur Kamel BADDARI
Doyen de la faculté des sciences
Université de Boumerdès
Algérie

CHAPITRE I

LES OUTILS MATHEMATIQUES

LES OUTILS MATHEMATIQUES

La modélisation de l'espace réel, considéré dans le cadre de la mécanique classique comme étant à trois dimensions, homogène et isotrope suppose l'introduction d'outils mathématiques tel que les vecteurs, et les notions sur les torseurs. Dans cette partie nous présenterons les rappels et l'ensemble des opérations mathématiques sur les vecteurs. Nous développerons aussi l'étude sur les torseurs qui sont des outils mathématiques très important en mécanique classique, notamment en mécanique des solides. L'utilisation des torseurs en mécanique permet de simplifier l'écriture des équations relatives aux grandeurs fondamentales de la mécanique.

1. Opérations sur les vecteurs

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera à l'ensemble E des vecteurs $\vec{V}$ de l'espace usuel. E est un espace Euclidien à trois dimensions.

2. Définition

Un vecteur est un segment de droite OA sur lequel on a choisi une origine O et une extrémité A ; il est défini par :

- son origine ;
- sa direction ;
- son sens ;
- son module.

O A

Par convention on adopte la notation suivante : vecteur : $\vec{V}$ ou $\overrightarrow{OA}$

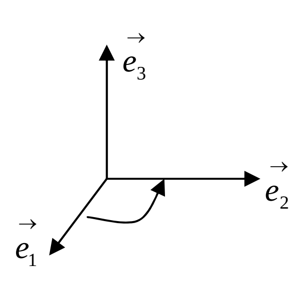
3. Classification des vecteurs

Il existe plusieurs types de vecteurs :

- *Vecteur libre :* la direction, le sens et le module sont donnés mais la droite support et le point d'application (origine du vecteur) ne sont pas connues ;
- *Vecteur glissant :* le point d'application (origine du vecteur) n'est pas fixé ;
- *Vecteur lié :* tous les éléments du vecteur sont déterminés ;
- *Vecteur unitaire :* c'est un vecteur dont le module est égal à 1.

4. Composantes d'un vecteur

Considérons une base de l'espace R^3 notée : $R_0 = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Cette base est orthonormée si : $\vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$



La base R_0 est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur $\vec{e_3}$ verra le vecteur $\vec{e_1}$ tourner vers le vecteur $\vec{e_2}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans cette base un vecteur $\vec{V}$ de composantes $(x, y, z) \in R^3$ s'écrirait :

$$\vec{V} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

Les quantités réelles x, y, z sont appelées composantes du vecteur $\vec{V}$ dans la base R^3.

La notation adoptée est la suivante : $\vec{V} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_{R_0}$

5. Loi de composition interne : Somme vectorielle

La somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est un vecteur $\vec{W}$ tel que :

$\forall \ \vec{V_1}, \vec{V_2} \in R^3$ nous avons $\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \in R^3$

Soit (a_1, a_2, a_3) les composantes du vecteur $\vec{V_1}$ d'où : $\vec{V_1} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ et

(b_1, b_2, b_3) les composantes du vecteur $\vec{V_2}$ d'où : $\vec{V_2} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$

Le vecteur somme est défini par la relation :

$$\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3}$$

L'élément neutre ou vecteur nul, est noté : $\vec{0} = (0,0,0)$

5.1 Propriétés de la somme vectorielle

- la somme vectorielle est commutative : $\vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{V_2} + \vec{V_1}$;

- la somme vectorielle est associative : $\left(\vec{V_1}+\vec{V_2}\right)+\vec{V_3}=\vec{V_1}+\left(\vec{V_2}+\vec{V_3}\right)$;
- l'élément neutre est défini par : $\vec{V}+\vec{0}=\vec{V}$;
- A tout vecteur $\vec{V}$ correspond un vecteur opposé noté $-\vec{V}$ tel que : $\vec{V}+\left(-\vec{V}\right)=\vec{0}$

5.2 Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre réel et $\vec{V}$ un vecteur, leur produit est un vecteur.

$\forall \lambda \in R$, $\forall\ \vec{V} \in R^3$ ========> $\vec{W}=\lambda\vec{V} \in R^3$

Le vecteur $\vec{W}$ est colinéaire au vecteur $\vec{V}$.

Si le vecteur $\vec{V}$ a pour composantes *(a, b, c)* tel que : $\vec{V}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$; le vecteur $\vec{W}$ s'écrirait : $\vec{W}=\lambda a_1\vec{e_1}+\lambda a_2\vec{e_2}+\lambda a_3\vec{e_3}$

La multiplication d'un vecteur par un scalaire vérifie les propriétés suivantes :

a) Distribution par rapport à l'addition des scalaires : $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{V}=\lambda_1\vec{V}+\lambda_2\vec{V}$;

b) Distribution par rapport à la somme vectorielle : $\lambda(\vec{V_1}+\vec{V_2})=\lambda\vec{V_1}+\lambda\vec{V_2}$;

c) Associativité pour la multiplication par un scalaire : $\lambda_1(\lambda_2\vec{V})=\lambda_1\lambda_2\vec{V}$

6. Combinaison linéaire des vecteurs

Soit les n vecteurs : $\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3},................\vec{V_i}...........\vec{V_n}$ de l'espace R^3 et $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,........\lambda_n$ des nombres réels. Les vecteurs $\lambda_1\vec{V_1},\lambda_2\vec{V_2},\lambda_3\vec{V_3},................\lambda_i\vec{V_i}...........\lambda_n\vec{V_n}$ sont aussi des vecteurs de l'espace R^3 ainsi que leur somme $\vec{W}$ défini par :

$$\vec{W}=\lambda_1\vec{V_1}+\lambda_2\vec{V_2}+\lambda_3\vec{V_3}+............+\lambda_n\vec{V_n}=\sum_i^n\lambda_i\vec{V_i}$$

Le vecteur $\vec{W}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs : $\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3},............\vec{V_n}$

6.1. Dépendance et indépendance linéaire entre les vecteurs

6.1.1. Définition

On dit que les n vecteurs : $\vec{V_1},\vec{V_2},\vec{V_3},................\vec{V_i}...........\vec{V_n}$ de l'espace R^3 sont linéairement

indépendant si et seulement si, ils vérifient la relation suivante : $\sum_{i}^{n} \lambda_i \vec{V_i} = \vec{0}$ entraîne que tous les λ_i sont nuls.

$$\sum_{i}^{n} \lambda_i \vec{V_i} = \lambda_1 \vec{V_1} + \lambda_2 \vec{V_2} + \lambda_3 \vec{V_3} + ... + \lambda_n \vec{V_n} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = 0 \;, ... \lambda_n = 0$$

Si les λ_i ne sont pas tous nuls on dit que les vecteurs sont linéairement dépendant entre eux.

6.1.2. Propriétés sur l'indépendance des vecteurs

a) Un vecteur $\vec{V}$ est à lui seul un vecteur linéairement indépendant ;

b) Dans un système de vecteurs linéairement indépendants, aucun d'entre eux ne peut être un vecteur nul ;

c) Dans un ensemble de vecteurs indépendants, tout sous ensemble prélevé sur ces vecteurs forme un système de vecteurs indépendants.

6.1.3. Propriétés sur la dépendance des vecteurs

Si n vecteurs sont dépendants entre eux alors, au moins l'un d'entre eux est une combinaison linéaire des autres. Soit les n vecteurs : $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ...\vec{V_i}\, ...\vec{V_n}$ de l'espace R^3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...\lambda_n$ des nombres réels, si ces vecteurs sont linéairement dépendants la relation :

$$\sum_{i}^{n} \lambda_i \vec{V_i} = \vec{0}$$

Implique qu'il existe des λ_i non nuls, de telle sorte que la relation puise s'écrire :

$$\lambda_1 \vec{V_1} + \lambda_2 \vec{V_2} + \lambda_3 \vec{V_3} + ... + \lambda_n \vec{V_n} = \vec{0}$$ qui donne par exemple :

$$\lambda_1 \vec{V_1} = -\left(\lambda_2 \vec{V_2} + \lambda_3 \vec{V_3} + ... + \lambda_n \vec{V_n} \right)$$

$$\vec{V_1} = -\frac{1}{\lambda_1}\left(\lambda_2 \vec{V_2} + \lambda_3 \vec{V_3} + ... + \lambda_n \vec{V_n} \right)$$

On dit alors que $\vec{V_1}$ dépend linéairement des vecteurs : $\vec{V_2}, \vec{V_3}, ...\vec{V_n}$

Remarque :

a) Si $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ...\vec{V_n}$ sont linéairement indépendant, alors les vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, ...\vec{V_n}, \vec{V_{n+1}}, \vec{V_{n+2}}, ...$ le sont aussi quel que soit les vecteurs $, \vec{V_{n+1}}, \vec{V_{n+2}}, ...$

Dans un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, chaque vecteur est une combinaison unique des autres vecteurs.

b) Soit $\vec{W} = \sum_{i}^{n} \alpha_i \vec{V_i}$ et $\vec{U} = \sum_{i}^{n} \beta_i \vec{V_i}$ deux vecteurs indépendants:

L'égalité entre les deux vecteurs indépendants est équivalente à n égalités entre les nombres réels : Si $\vec{W} = \vec{V} \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$

7. Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ une loi de composition externe qui associe aux deux vecteurs, un scalaire (nombre réel) noté : $\vec{V_1} \bullet \vec{V_2}$ tel que :

$$\forall \; \vec{V_1}, \; \vec{V_2} \in R^3 \quad \Rightarrow \vec{V_1} \bullet \vec{V_2} \in R$$

$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \left\| \vec{V_1} \right\| \left\| \vec{V_2} \right\| \cos(\vec{V_1}, \vec{V_2})$; le résultat d'un produit scalaire est un scalaire.

Le produit scalaire est nul, si :

- Les deux vecteurs sont orthogonaux ;
- L'un des vecteurs est nul.

7.1 Propriétés du produit scalaire

a) linéarité : $\left(\vec{V_1} + \vec{V_2} \right) \bullet \vec{W} = \vec{V_1} \bullet \vec{W} + \vec{V_2} \bullet \vec{W}$

$$\left(\lambda \vec{V} \right) \bullet \vec{W} = \lambda \left(\vec{V} \bullet \vec{W} \right)$$

b) symétrie par rapport aux vecteurs : $\vec{V} \bullet \vec{W} = \vec{W} \bullet \vec{V}$ donc : $\vec{V} \bullet \vec{V} > 0$ si $\vec{V} \neq \vec{0}$

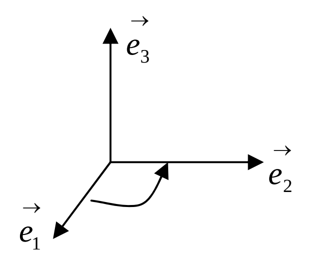
Le produit scalaire est une forme linéaire symétrique associée aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

7.2 Expression analytique du produit scalaire

Considérons une base b de l'espace R^3 notée : $b = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Cette base est orthonormée si :

$$\vec{e_i} \bullet \vec{e_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La base b est dite directe si un observateur se plaçant à l'extrémité du vecteur $\vec{e_3}$ verra le vecteur $\vec{e_1}$ tourner vers le vecteur $\vec{e_2}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$. Leurs expressions dans cette base sont :

$$\vec{V}_1 = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$$

$$\vec{V}_2 = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est donné par :

$$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = \left(a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3\right) \bullet \left(b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

7.3. Norme ou module d'un vecteur

On appelle norme ou module d'un vecteur $\vec{V}$, noté : $\left\|\vec{V}\right\|$ la racine carrée positive du produit scalaire du vecteur par lui-même. $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\vec{V} \bullet \vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2}$

Nous avons en particuliers : $\left\|\lambda \vec{V}\right\| = \left\|\lambda\right\| \left\|\vec{V}\right\|$

$\left\|\vec{V}_1\right\| - \left\|\vec{V}_2\right\| \leq \left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\| \leq \left\|\vec{V}_1\right\| + \left\|\vec{V}_2\right\|$: appelé inégalité triangulaire.

7.4. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\text{Si} \quad \vec{V} \perp \vec{W} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V} \bullet \vec{W} = \vec{0}$$

Si trois vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, ils sont alors linéairement indépendant et ils constituent une base orthogonale dans R^3.

7.5. Base orthonormée

Une base est dite orthonormée si les vecteurs qui la constituent sont perpendiculaires deux à deux et si leurs normes sont égales à 1. Si $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons alors :

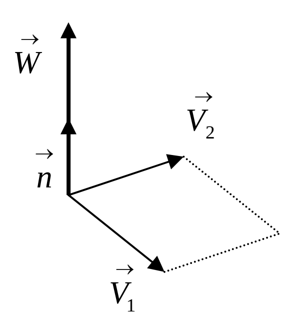
$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0 \quad , \quad \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 = 0 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_2^{\,2} = 1 \quad , \quad \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_3^{\,2} = 1$$

8. Produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de l'espace R^3 est un vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, défini par : $\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \left\|\vec{V_1}\right\| \left\|\vec{V_2}\right\| \sin\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}\right) \vec{n}$

ou $\vec{n}$: est un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$



Le produit vectoriel est nul si :

- Les deux vecteurs sont colinéaires ;
- L'un des vecteurs, est nul.

8.1. Propriétés du produit vectoriel

a) Le module du produit vectoriel est égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$;

b) Le produit vectoriel est distributif à gauche et à droite pour la somme vectorielle :

$$(\vec{V_1} + \vec{V_2}) \wedge \vec{W} = \vec{V_1} \wedge \vec{W} + \vec{V_2} \wedge \vec{W}$$

$$\vec{W} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{W} \wedge \vec{V_1} + \vec{W} \wedge \vec{V_2}$$

c) Le produit vectoriel est associatif pour la multiplication par un nombre réel :

$$(\lambda \vec{V}) \wedge \vec{W} = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

$$\vec{V} \wedge \lambda \vec{W}) = \lambda(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

d) Le produit vectoriel est antisymétrique (anticommutatif)

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$$

Si on applique cette propriété au produit vectoriel d'un même vecteur, nous aurons :

$$\vec{V} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{V}) = \vec{0}$$

On déduit à partir de cette propriété que : deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Si $\vec{V_1} \,//\, \vec{V_2}$ alors $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$

En effet si $\vec{V_1} \,//\, \vec{V_2}$ on peut écrire : $\vec{V_1} = \lambda \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \lambda(\vec{V_2} \wedge \vec{V_2}) = \vec{0}$

8.2. Produit vectoriel des vecteurs unitaires d'une base orthonormée

Si $b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée nous avons :

Sens direct : $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

Sens opposé : $\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$

8.3. Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormé direct

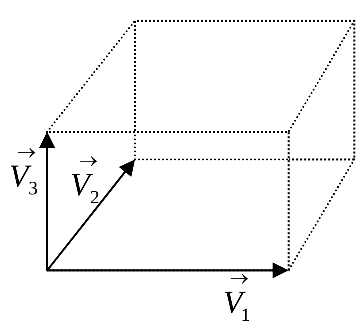
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ de composantes respectives dans une base orthonormée direct R: $\vec{V}_1 = \underset{R}{\begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases}}$ et $\vec{V}_2 = \underset{R}{\begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases}}$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{cases} = \begin{cases} Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{cases}$$

8.4. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ pris dans cet ordre, le nombre réel défini par : $\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$

Le produit mixte est donc un scalaire égal au volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs.



Le produit mixte est nul, si :

- les trois vecteurs sont dans le même plan ;
- deux des vecteurs sont colinéaires ;
- l'un des vecteurs, est nul.

On montre facilement que, dans une base orthonormée directe, le produit mixte est un variant scalaire par permutation circulaire direct des trois vecteurs car le produit scalaire est commutatif:

$$\vec{V}_1 \bullet \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right) = \vec{V}_3 \bullet \left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \vec{V}_2 \bullet \left(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1\right)$$

Remarque :

Une notation simplifiée, dans laquelle les opérateurs n'apparaissent pas, est adoptée dans ce cas pour faciliter l'écriture des équations vectorielles :

$$\vec{V_1} \bullet \left(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right) \text{ est équivalent à } \left(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3} \right)$$

nous avons alors : $\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3} \right) = \left(\vec{V_3}, \vec{V_1}, \vec{V_2} \right) = \left(\vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{V_1} \right)$

8.5. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel de trois vecteurs respectifs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ est un vecteur $\vec{W}$ exprimé par la relation : $\vec{W} = \vec{V_1} \wedge \left(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right)$. Le vecteur $\vec{W}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{V_1}$ et au vecteur formé par le produit : $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}$, il est donc dans le plan formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$. Le vecteur $\vec{W}$ peut s'écrire : $\vec{W} = a\vec{V_2} + b\vec{V_3}$

Nous pouvons présenter cette relation autrement par identification des scalaires *a* et *b*, on obtient :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3})\vec{V_2} \quad - \quad (\vec{V_1} \bullet \vec{V_2})\vec{V_3}$$

Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs car le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Pour retenir cette formule, il est plus simple de l'écrire sous la forme :

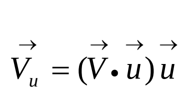
$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) \quad - \quad \vec{C}\,(\vec{A} \bullet \vec{B})$$

9. Projection des vecteurs

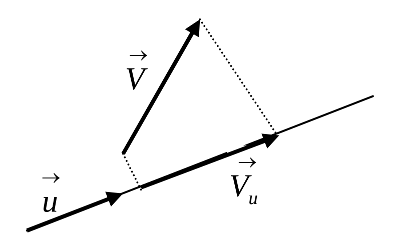
9.1. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (Δ) un axe de l'espace défini par son vecteur unitaire $\vec{u}$.

La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V_u}$ de ce vecteur du cet axe.



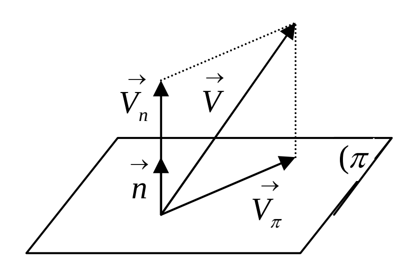
$$\vec{V_u} = (\vec{V} \bullet \vec{u})\,\vec{u}$$



9.2. Projection orthogonale d'un vecteur sur un plan

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque, et (π) un plan de l'espace défini par la normale $\vec{n}$. La projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ est la composante $\vec{V}_\pi$ dans le plan.

Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes l'une dans le plan et l'autre perpendiculaire au plan. On a ainsi : $\vec{V}_\pi = \vec{V} - \vec{V}_n = \vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{n})\,\vec{n}$



Qui s'écrit aussi sous la forme : $\vec{V}_\pi = (\vec{n} \bullet \vec{n})\vec{V} - (\vec{V} \bullet \vec{n})\,\vec{n}$

On retrouve la relation du double produit vectoriel entre les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{n}$: $\vec{V}_\pi = \vec{n} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{n})$

10. Division vectorielle

Si $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{W}$, on dit que $\vec{X}$ est le résultat de la division vectorielle de $\vec{W}$ par $\vec{V}$

i) $\vec{V}$ ne doit pas être un vecteur nul ;

ii) $\vec{W}$ et $\vec{V}$ doivent être orthogonaux

S'il existe une solution particulière $\vec{X}_0$, alors elle est la forme $\vec{X}_0 = \alpha \vec{V} \wedge \vec{W}$

En remplaçant cette valeur dans l'expression $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{W}$ on obtient :

$$\alpha(\vec{V} \wedge \vec{W}) \wedge \vec{V} = \vec{W} \quad \Leftrightarrow \alpha \vec{W}(\vec{V} \bullet \vec{V}) - \alpha \vec{V}(\vec{V} \bullet \vec{W}) = \vec{W}$$

Comme $\vec{V} \perp \vec{W}$ alors $\vec{V} \bullet \vec{W} = 0$; on obtient :

$$\alpha \vec{W}(\vec{V} \bullet \vec{V}) = \vec{W} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{1}{V^2}$$

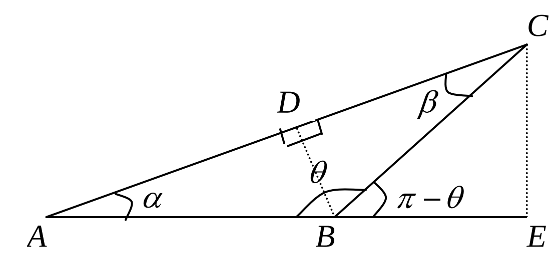
Nous avons aussi : $\vec{X} \wedge \vec{V} = \vec{X}_0 \wedge \vec{V} \quad \Rightarrow \quad (\vec{X} - \vec{X}_0) \wedge \vec{V} = \vec{0}$ cette expression montre que le vecteur $(\vec{X} - \vec{X}_0)$ est parallèle à $\vec{V}$, dans ce cas nous pouvons écrire que :

$$(\vec{X} - \vec{X}_0) = \lambda \vec{V} \quad \text{avec} \quad \lambda \in IR \quad \text{ou} \quad \vec{X} = \vec{X}_0 + \lambda \vec{V}$$

finalement : $$\vec{X} = \frac{\vec{V} \wedge \vec{W}}{V^2} + \lambda \vec{V}$$

11. Règle des sinus dans un triangle

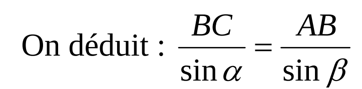
Soit un triangle quelconque ABC nous pouvons établir une relation entre les trois côtés et les trois angles du triangle.



Dans les triangles ABD et CBD, nous avons :

$$\sin\alpha = \frac{DB}{AB} \qquad \text{et} \qquad \sin\beta = \frac{DB}{BC}$$

d'où : $AB\sin\alpha = BC\sin\beta$



On déduit : $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{AB}{\sin\beta}$

De même pour les triangles AEC et BEC, nous avons :

$$\sin\alpha = \frac{EC}{AC} \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi-\theta) = \frac{EC}{BC} \qquad \text{d'où} \quad AC\sin\alpha = BC\sin(\pi-\theta) = BC\sin\theta$$

On déduit : $\dfrac{BC}{\sin\alpha} = \dfrac{AC}{\sin\theta}$

On déduit finalement une relation appelée règle des sinus dans un triangle:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\theta}$$

12. Opérateurs et vecteurs

12.1 Opérateur gradient dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On défini l'opérateur vectorielle noté : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ comme étant la dérivée dans l'espace suivant les trois directions des vecteurs unitaires.

Le gradient d'un scalaire U est défini comme étant la dérivée vectorielle suivant les trois directions respectives $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ par rapport aux variables : x, y, z.

$$\overrightarrow{gradU}(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{grad\,U} = \vec{\nabla}U$$

Exemple :

$$U = 3xy - 2zx + 5yz \; : \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 3y - 2z \;, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 3x + 5z \;, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -2x + 5y$$

$$\overrightarrow{gradU}(x,y,z) = (3y-2z)\,\vec{i} + (3x+5z)\,\vec{j} + (-2x+5y)\,\vec{k}$$

Le gradient d'un scalaire est un vecteur.

12.2 Opérateur divergence dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

La divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit scalaire de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$; noté : $div\vec{V} = \vec{\nabla} \bullet \vec{V}$

$$div(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \bullet \left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire.

12.3 Opérateur rotationnel dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$ est définie comme étant le produit vectoriel de l'opérateur : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ par le vecteur $\vec{V}$;

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \quad ; \qquad \overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \wedge \left(V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}\right)$$

Le rotationnel d'un vecteur est aussi un vecteur.

Sous la forme matricielle nous aurons : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \wedge \begin{cases} V_x \\ V_y \\ V_z \end{cases} = \begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{cases}$

Remarque :

Si f est un champ scalaire et $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs quelconques, les relations suivantes sont vérifiées :

- $div(f\,\vec{A}) = f div\,\vec{A} + \vec{A}\,\overrightarrow{grad f}$;
- $rot(rot\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$, avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;
- $\overrightarrow{rot}(f\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad f} \wedge \vec{A}) + f\,\overrightarrow{rot}(\vec{A})$;
- $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad f}) = \vec{0}$;
- $div(\overrightarrow{rot}(\vec{A})) = 0$;
- $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \bullet \overrightarrow{rot}(\vec{B})$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2,3,-3), B(5,7,2)

Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donné par : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{i} + 5\,\vec{i}$

Son module : $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50}$

Sa direction est déterminée par les angles (α, β, θ) qu'il fait avec chacun des axes du repère.

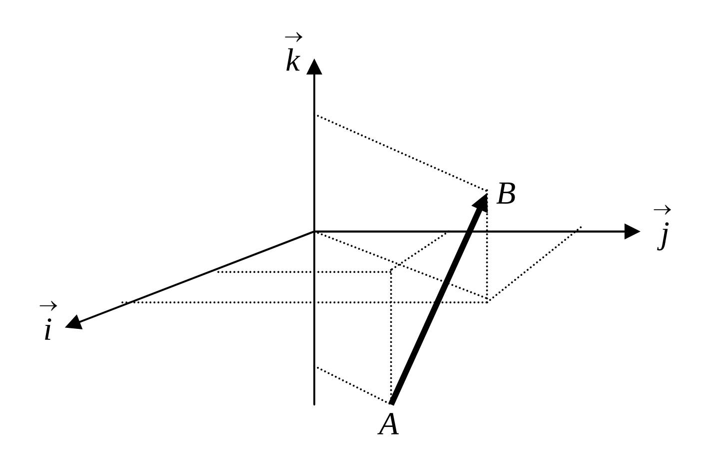
Ses angles se déduisent par le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par les vecteurs unitaires du repère orthonormé :

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \vec{i}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{i} = AB.1.\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{i}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{50}} = 0.424 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 64.89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB}, \vec{j}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{j} = AB.1.\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{j}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{50}} = 0.565 \quad \Rightarrow \quad \beta = 55.54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB}, \vec{k}) \;:\; \overrightarrow{AB} \bullet \vec{k} = AB.1.\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \vec{k}}{AB} = \frac{5}{\sqrt{50}} = 0.707 \quad \Rightarrow \quad \theta = 44.99°$$

son sens : comme le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les trois vecteurs unitaires est positif alors, il a un sens positif suivant les trois axes du repère.



Exercice 02 :

La résultante de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ est égale à 50 N et fait un angle de 30° avec la force $F_1 = 15N$. Trouver le module de la force $\vec{F_2}$ et l'angle entre les deux forces.

Solution :

$R = 50\,N$; $V_1 = 15\,N$; $\alpha = 30°$, nous avons : $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Dans le triangle rectangle: *ACD rectangle en D, nous avons :*

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

$AD = AB + BD = F_1 + F_2 \cos\theta$

$DC = F_2 \sin\theta$

On obtient alors : $R^2 = (F_1 + F_2\cos\theta)^2 + (F_2\sin\theta)^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$ **(1)**

Nous avons aussi :

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{CD}{R} \Rightarrow CD = R\sin\alpha \\ \sin\theta = \dfrac{CD}{F_2} \Rightarrow CD = F_2\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow R\sin\alpha = F_2\sin\theta \quad \textbf{(2)}$$

et $\cos\alpha = \dfrac{AD}{R} = \dfrac{F_1 + F_2\cos\theta}{R} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}$ **(3)**

en remplaçant l'expression (3) dans (1), on aboutit à :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(\frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}\right) = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R\cos\alpha - F_1)$$

d'où : $F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)}$

$$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2x15(50\cos 30° - 15)} = 44{,}44N$$

L'expression **(3)** nous donne : $\cos\theta = \dfrac{50\cos 30 - 15}{50} = 0{,}566 \Rightarrow \theta = 55{,}528°$

Exercice 03 :

Soient les vecteurs suivants : $\vec{U}_1 = A_1\,\vec{i} + A_2\,\vec{j} + A_3\,\vec{k}$ *et* $\vec{U}_2 = B_1\,\vec{i} + B_2\,\vec{j} + B_3\,\vec{k}$

1) Calculer les produits scalaires : $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2$, $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_1$, $\vec{U}_2 \bullet \vec{U}_2$,

On donne : $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 5\,\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -3\,\vec{i} + 1{,}5\,\vec{j} - 7.5\,\vec{k}$, $\vec{V}_3 = -5\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}$

2) Calculer $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$;

3) Sans faire de représentation graphique que peut-on dire du sens et de la direction du vecteur $\vec{V}_2$ par rapport à $\vec{V}_1$;

4) Calculer les produits suivants $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$;

5) Déterminer la surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$

Solution :

1) $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_2 = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$, $\vec{U}_1 \bullet \vec{U}_1 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, $\vec{U}_2 \bullet \vec{U}_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$

2) $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -6 - 1{,}5 - 37{,}5 = -45$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2 \\ -1{,}5 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 7{,}5 - 7{,}5 \\ -1{,}5 + 1{,}5 \\ 3 - 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3) Comme le produit vectoriel des deux vecteurs est nul, alors ils sont parallèles

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$$

De plus leur produit scalaire est négatif $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = -45$, alors les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont parallèles et de sens opposés

4) $$\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} -3 \\ 1{,}5 \\ -7{,}5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5 \\ 40{,}5 \\ -4{,}5 \end{cases} = 63 - 40{,}5 - 22{,}5 = 0$$

on peut retrouver ce résultat par la méthode vectorielle :

Nous avons $\vec{V}_1 \ // \ \vec{V}_2$ soit $\vec{W} = \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V}_2 \perp \vec{W} \\ \vec{V}_3 \perp \vec{W} \end{cases}$, calculons $\vec{V}_1 \bullet \vec{W}$

$$\vec{V_2} \perp \vec{W} \text{ et } \vec{V_1} \,//\, \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{W} \Leftrightarrow \vec{V_1} \bullet \vec{W} = 0$$

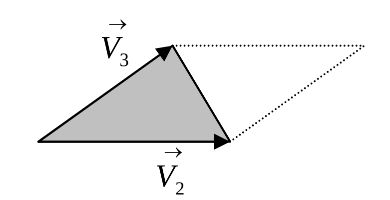
$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \left(\begin{cases} -3 \\ 1,5 \\ -7,5 \end{cases} \wedge \begin{cases} -5 \\ 4 \\ 1 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 31,5 \\ 40,5 \\ -4,5 \end{cases} = \begin{cases} -198 \\ 166,5 \\ 112,5 \end{cases}$$

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = -198\,\vec{i} + 166\,\vec{j} + 112,5\,\vec{k}$$

5) La surface du triangle formé par les vecteurs $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est donnée par la moitié du module du produit vectoriel des deux vecteurs :

Nous avons : $\vec{V_2} \wedge \vec{V_3} = 31,5\,\vec{i} + 40,5\,\vec{j} - 4,5\,\vec{k}$ alors :

$$\left| \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right| = \sqrt{31,5^2 + 40,5^2 + (-4,5)^2} = 51,50$$



$$S = \frac{\left| \vec{V_2} \wedge \vec{V_3} \right|}{2} = \frac{51,50}{2} = 25,75$$

c'est la demi surface du parallélogramme :

Exercice 04 :

Soient les vecteurs :

$$\vec{U} = 2\,\vec{i} + 6\,\vec{k} \;,\; \vec{V} = 8\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \;,\; \vec{P} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \;,\; \vec{Q} = -2\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$$

1) *Déterminer y et z pour que les vecteurs* $\vec{U}$ et $\vec{V}$ *soient colinéaires ;*

2) *Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs* $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ *soient perpendiculaires;*

Solution :

1) Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires alors: $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ 0 \\ 6 \end{cases} \wedge \begin{cases} 8 \\ y \\ z \end{cases} = \begin{cases} -6y \\ -2z + 48 \\ 2y \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 24 \end{cases}$

2) Si $\vec{P}$ et $\vec{Q}$ sont perpendiculaires alors : $\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \\ -4 \\ 2 \end{cases} \bullet \begin{cases} -2 \\ y \\ 12 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow -6 - 4y + 24 = 0 \quad y = \frac{9}{2}$$

Exercice 05 :

Trouvez le volume d'un parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs : $\vec{U}, \vec{P}, \vec{Q}$, *tel que :*

$\vec{U} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{P} = 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{Q} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$,

Solution :

Le volume d'un parallélépipède est un scalaire positif. On doit utiliser une opération vectorielle dont le résultat est un scalaire positif : c'est le module du produit mixte des trois vecteurs : $v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right|$

$$\vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \left(\begin{cases} 0 \\ 3 \\ 5 \end{cases} \wedge \begin{cases} 1 \\ 4 \\ -2 \end{cases} \right) = \begin{cases} 2 \\ 6 \\ 0 \end{cases} \bullet \begin{cases} -26 \\ 5 \\ -3 \end{cases} = -52 + 30 = -22 \ ; \ \Rightarrow$$

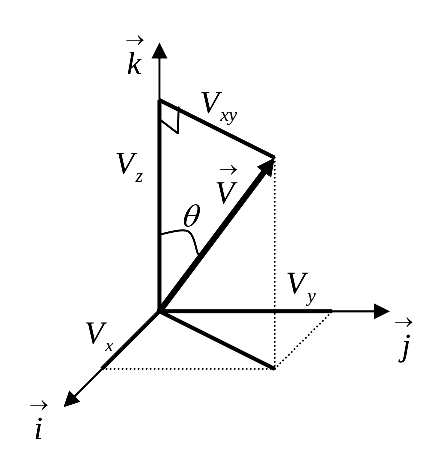
$$v = \left| \vec{U} \bullet (\vec{P} \wedge \vec{Q}) \right| = |-22| = 22$$

Exercice 06 :

La trajectoire d'un mobile dans un repère orthonormé directe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *est donnée par les équations paramétriques suivantes :* $x = 4t^2$, $y = 4(t - \frac{t^3}{3})$, $z = 3t + t^3$

Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe *oz. Quelle est la valeur de cet angle.*

Solution :



La vitesse du mobile est donnée par : $\vec{V} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 4(1 - t^2) \\ V_z = 3(1 + t^2) \end{cases}$

Nous avons en effet :

$$tg\theta = \frac{V_{xy}}{V_z} = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_z}$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{64t^2 + 16(1 - t^2)^2}}{3(1 + t^2)} = \frac{\sqrt{64t^2 + 16t^4 - 32t^2 + 16}}{3(1 + t^2)}$$

$$tg\theta == \frac{\sqrt{16(t^2+2t^2+1)}}{3(1+t^2)} = \frac{\sqrt{16(1+t^2)^2}}{3(1+t^2)} = \frac{4(1+t^2)}{3(1+t^2)} = \frac{4}{3}$$

$tg\theta = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 53{,}13°$ la valeur de l'angle est bien constante.

Exercice 07 :

La ligne d'action d'une force $\vec{F}$ de $800\,N$, passe par les points $A\begin{cases}1{,}22\\0\\2{,}74\end{cases}$ et $B\begin{cases}0\\1{,}22\\0{,}61\end{cases}$ dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force

Solution :

Nous avons : $\overrightarrow{AB} = AB\,\vec{u}_{AB} \quad \Rightarrow \vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ vecteur unitaire porté par la ligne d'action.

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{-1{,}22\,\vec{i} + 1{,}22\,\vec{j} - 2{,}13\,\vec{k}}{\sqrt{(-1{,}22)^2 + (1{,}22)^2 + (-2{,}13)^2}} = \frac{-1{,}22\,\vec{i} + 1{,}22\,\vec{j} - 2{,}13\,\vec{k}}{2{,}74}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0{,}445\,\vec{i} + 0{,}445\,\vec{j} - 0{,}777\,\vec{k}$$

La force $\vec{F}$ s'écrira :

$$\vec{F} = F\,\vec{u}_{AB} = 800(-0{,}445\,\vec{i} + 0{,}445\,\vec{j} - 0{,}777\,\vec{k}) = -356\,\vec{i} + 356\,\vec{j} - 621{,}6\,\vec{k})$$

Les composantes de la force sont ainsi connues suivant les trois axes du repère.

Exercice 08 :

Soit un repère orthonormé direct $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dans l'espace vectoriel Euclidien R^3 à trois dimensions dans le corps des nombres réels. Soit un axe $\Delta(O, \vec{u})$ passant par le point O et de vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = \begin{cases}u_1\\u_2\\u_3\end{cases}$, et un vecteur quelconque $\vec{V} = \begin{cases}V_1\\V_2\\V_3\end{cases}$

On note π_u un plan orthogonal à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$

1) Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{u} \bullet \vec{u}$, $\vec{V} \bullet \vec{V}$, $\vec{u} \bullet \vec{V}$;

2) Déterminer les composantes du vecteur $\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{V}$ dans le repère $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$; En déduire dans cette base la matrice représentant l'opérateur produit vectoriel noté : $\vec{u}\wedge = [*u]$;

3) Trouver l'expression du vecteur $\vec{V}_u$: projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$; En déduire la matrice $[u_P]$ représentant l'opérateur projection orthogonale sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$;

4) Trouver l'expression du vecteur $\vec{V}_\pi$: projection orthogonale du vecteur $\vec{V}$ sur le plan π_u ; En déduire la matrice $[u_\pi]$ représentant l'opérateur projection orthogonale sur sur le plan π_u ;

5) Déterminer l'expression de la distance d d'un point $P\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_R$ à l'axe $\Delta(O,\vec{u})$; En déduire l'expression matricielle représentant la distance au carrée : d^2 dans le repère *R*.

Solution :

1) Calcul des produits scalaires :

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \ , \quad \vec{V} \bullet \vec{V} = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 \quad , \quad \vec{u} \bullet \vec{V} = u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3$$

2) $\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{V}$ dans le repère $R(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$$\vec{W} = \vec{u} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2V_3 - u_3V_2 \\ u_3V_1 - u_1V_3 \\ u_1V_2 - u_2V_1 \end{pmatrix}$$

, sous forme matricielle l'expression s'écrira :

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{W} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \vec{V}$$

$\vec{W} = [*u]\vec{V}$ avec : $[*u] = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$ opérateur produit vectoriel.

3) Expression du vecteur $\vec{V}_u$, projection de $\vec{V}$ sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ dans R

Nous avons : $\vec{V}_u = \left(\vec{V} \bullet \vec{u}\right)\vec{u}$

$$\vec{V}_u = \left(\vec{V} \bullet \vec{u}\right)\vec{u} = (u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3)\vec{u} = (u_1V_1 + u_2V_2 + u_3V_3)\left(u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3\right)$$

$$= \left(u_1^2V_1 + u_1u_2V_2 + u_1u_3V_3\right)\vec{e}_1 + \left(u_1u_2V_1 + u_2^2V_2 + u_2u_3V_3\right)\vec{e}_2 + \left(u_1u_3V_1 + u_2u_3V_2 + u_3^2V_3\right)\vec{e}_3$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}(u_1 \quad u_2 \quad u_3)\vec{V} = [u]\left[u^T\right]\vec{V}$$

Nous avons donc : $[u_P] = [u][u^T] = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}(u_1 \quad u_2 \quad u_3) = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix}$

4) Expression du vecteur $\vec{V}_\pi$, projection de $\vec{V}$ sur le plan (π) orthogonal à $\vec{u}$

Le vecteur $\vec{V}$ a deux composantes, l'une perpendiculaire au plan elle est portée par l'axe (Δ) et l'autre dans le plan (π).

Nous avons alors : $\vec{V} = \vec{V}_u + \vec{V}_\pi = \left(\vec{V} \bullet \vec{u}\right)\vec{u} + \vec{V}_\pi$

$\vec{V}_\pi = \vec{V} - \left(\vec{V} \bullet \vec{u}\right)\vec{u} = \left(\vec{u} \bullet \vec{u}\right)\vec{V} - \left(\vec{V} \bullet \vec{u}\right)\vec{u}$, on retrouve la forme du double produit vectoriel d'où : $\vec{V}_\pi = \vec{u} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{u}\right)$. Le produit vectoriel est anticommutatif, alors :

$\vec{V} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{V} = -[*u]\vec{V}$, ce qui donne : $\vec{V}_\pi = [*u]\left\{-[*u]\vec{V}\right\}$

mais nous savons que : $[*u]^T = -[*u]$ on a finalement :

$$\vec{V}_\pi = [*u]\left\{[*u]^T\vec{V}\right\} = \left\{[*u][*u]^T\right\}\vec{V} = [u_P]\vec{V}$$

avec $[u_P] = [*u][*u]^T$

Développons cette expression :

$$[u_P] = [*u][*u]^T = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & 0 & u_1 \\ u_2 & -u_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^2 + u_3^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & u_1^2 + u_3^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & u_1^2 + u_2^2 \end{bmatrix}$$

sachant que : $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ alors : $u_2^2 + u_3^2 = 1 - u_1^2$, $u_1^2 + u_3^2 = 1 - u_2^2$, $u_1^2 + u_2^2 = 1 - u_3^2$

La matrice $[u_P]$ s'écrira :

$$[u_P] = \begin{bmatrix} 1-u_1^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & 1-u_2^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & 1-u_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_1^2 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_1u_2 & u_2^2 & -u_2u_3 \\ -u_1u_3 & -u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix}$$

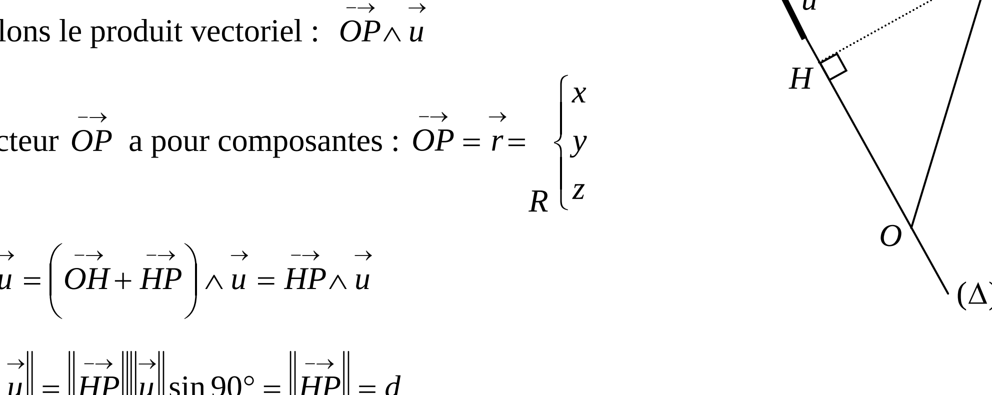
$$[u_p] = [1] - [u][u]^T$$

or nous avons $[u_P] = [*u][*u]^T \quad \Rightarrow \quad [*u][*u]^T = [1] - [u][u]^T$

finalement : $\quad [*u][*u]^T + [u][u]^T = [1]$

5) Expression de la distance d du point P à l'axe $\Delta(O, \vec{u})$

$$d = \left\| \overrightarrow{HP} \right\|$$



Calculons le produit vectoriel : $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}$

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour composantes : $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_R$

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP} \right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HP} \wedge \vec{u}$$

$$\left\| \overrightarrow{HP} \wedge \vec{u} \right\| = \left\| \overrightarrow{HP} \right\| \left\| \vec{u} \right\| \sin 90° = \left\| \overrightarrow{HP} \right\| = d$$

nous avons alors :

$d^2 = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} \right) \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u} \right)$ nous allons utiliser la règle du produit mixte afin de développer cette expression.

$$d^2 = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right) = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}, \overrightarrow{OP}, \vec{u}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}, \overrightarrow{OP}\right)$$

$$= \left(\vec{u}, \overrightarrow{OP}, \vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right)$$ qui s'écrit sous forme :

$$d^2 = \vec{u} \bullet \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{V} = \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right)$$

D'après ce que l'on a vu précédemment, nous pouvons écrire :

$$\left[* \vec{r}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$d^2 = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) = \vec{u} \bullet \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(-\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}\right)\right) = \vec{u} \bullet (\vec{r} \wedge (-\vec{r} \wedge \vec{u}) = \left[\vec{u}\right]^T \left([*r][-*r]\right)\left[\vec{u}\right]$$

or nous avons $[-*r] = [*r]^T$

$$d^2 = \left[\vec{u}\right]^T \left([*r][*r]^T\right)\left[\vec{u}\right] = \left[\vec{u}\right]^T [I_O]\left[\vec{u}\right] \quad \text{avec} \quad \left([*r][*r]^T\right) = [I_O]$$

$$[I_O] = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

en faisant intervenir la masse du solide, nous obtenons une matrice de la forme :

$$[J_0] = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

qui est une matrice très particulière que l'on retrouvera dans les chapitres sur la cinétique et la dynamique des solides.

Elle est appelée matrice d'inertie du solide.

Exercice : 09

Résoudre l'équation vectorielle : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non nuls.

Solution :

L'équation n'admet de solution que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. Soit (π) un plan contenant les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{x}$, alors le vecteurs $\vec{b}$ est perpendiculaire à ce plan (π).

On cherche d'abord une solution particulière avec un vecteur $\vec{x}_0$ tel que : $\vec{a}$ et $\vec{x}_0$ soient deux vecteurs perpendiculaires entre eux : $\vec{a} \perp \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{a} \bullet \vec{x}_0 = 0$

Alors on a aussi : $\vec{a} \wedge \vec{x}_0 = \vec{b}$ Multiplions vectoriellement à gauche cette équation par le vecteur $\vec{a}$, on obtient : $\vec{a} \wedge \left(\vec{a} \wedge \vec{x}_0 \right) = \vec{a} \wedge \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\left(\vec{a} \bullet \vec{x}_0 \right) - \vec{x}_0\left(\vec{a} \bullet \vec{a} \right) = \vec{a} \wedge \vec{b}$

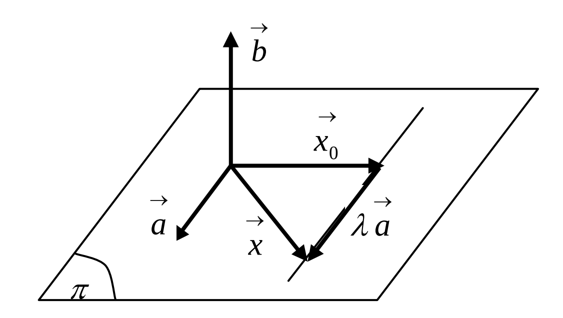
$$-\vec{x}_0\left(\vec{a} \bullet \vec{a} \right) = \vec{a} \wedge \vec{b} \Rightarrow \vec{x}_0 = \frac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{a^2}$$

nous avons ainsi : $\begin{cases} \vec{a} \wedge \vec{x}_0 = \vec{b} \\ \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b} \end{cases}$ en faisant la différence entre ces deux équations, nous obtenons la solution générale $\vec{x}$: $\vec{a} \wedge \vec{x} - \vec{a} \wedge \vec{x}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \wedge \left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right) = \vec{0}$

Comme le produit vectoriel est nul alors alors $\vec{a} \,//\left(\vec{x} - \vec{x}_0 \right)$ d'où : $\vec{x} - \vec{x}_0 = \lambda\, \vec{a}$

On a finalement : $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\, \vec{a} \Rightarrow \vec{x} = \dfrac{\vec{b} \wedge \vec{a}}{a^2} + \lambda\, \vec{a}$

Représentation géométrique :



Exercice : 10

On dispose de deux forces l'une de *9 N* l'autre de *7 N*. Comment doit-on les disposer pour obtenir une résultante de : *16 N ; 11,40 ; 3 N*

Exercice 11 :

Calculer la surface du triangle ABC, où les sommets ont pour coordonnées dans un repère orthonormé : $A(-1,-3,-2)$, $B(2,\ 2,-2)$, $C(3,\ 2,\ 4)$

Exercice 12 :

Déterminer la résultante des trois forces concourantes au point $A(2,2,3)$:

$$\vec{F}_1 = \vec{i} - 7\,\vec{j} + 2{,}5\,\vec{k} \quad ; \quad \vec{F}_2 = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 5\,\vec{k} \quad ; \quad \vec{F}_3 = -3\,\vec{i} + \vec{j} + 4\,\vec{k}$$

Calculer : $\left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\|$, $\left\|\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2\right\|$, $\left\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right\|$

En déduire le module, la direction et le vecteur unitaire porté par la résultante

Que peut-on dire de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_3$.

Exercice 13 :

Soit le système d'équations vectorielles dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

déterminer les deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{X} + \vec{Y} = \vec{V}_1 & (1) \\ \vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{V}_2 & (2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \vec{V}_1 &= 7\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \\ \vec{V}_2 &= 8\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \end{aligned}$$

On multiplie vectoriellement à gauche l'équation (1) par le vecteur $\vec{X}$ puis on applique la règle de division vectorielle qu'on vient de voir dans l'exercice (09).

$\vec{X} \wedge \left(\vec{X} + \vec{Y}\right) = \vec{X} \wedge \vec{V}_1 \;\Rightarrow\; \vec{X} \wedge \vec{Y} = \vec{X} \wedge \vec{V}_1$, on remplace cette expression dans l'équation (2)

d'où : $\vec{X} \wedge \vec{V}_1 = \vec{V}_2$ on déduit d'après ce que l'on a vue dans l'exercice (9) que :

$$\vec{X} = \frac{\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1}{V_1^2} + \lambda \vec{V}_1$$

$$\vec{X} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 8 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\left(7\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right) \quad = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \\ 137 \end{pmatrix} + \lambda\left(7\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{X} = \left(\frac{-38}{69} + 7\lambda\right)\vec{i} + \left(\frac{-2}{69} + 4\lambda\right)\vec{j} + \left(\frac{137}{69} + 2\lambda\right)\vec{k}$$

On déduit $\vec{Y}$ facilement par :

$$\vec{Y} = \vec{V}_1 - \vec{X} = \left(7\,\vec{i} + 4\,\vec{i} + 2\,\vec{i}\right) - \left(\frac{-38}{69} + 7\lambda\right)\vec{i} - \left(\frac{-2}{69} + 4\lambda\right)\vec{j} - \left(\frac{137}{69} + 2\lambda\right)\vec{k}$$

$$\vec{Y} = \left(\frac{38}{69} + 7(1-\lambda)\right)\vec{i} + \left(\frac{2}{69} + 4(1-\lambda)\right)\vec{j} + \left(\frac{-137}{69} + 2(1-\lambda)\right)\vec{k}$$

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne trois points A, B, C de l'espace ayant pour coordonnées : $A(1,3,4)$, $B(-1,4,-2)$, $C(0,1,1)$. Soit (π) un plan défini par ces trois points et la normale $\vec{n}$ à celui-ci.

Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V} = 3\,\vec{i} + \vec{j} - 4\,\vec{k}$ dans le plan (π) et suivant la normale à ce plan.

Solution :

Le vecteur $\vec{V}$ s'écrirait : $\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{V}_\pi$

Où $\vec{V}_n \perp (\pi)$ et $\vec{V}_\pi \in (\pi)$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan et aussi aux vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$

Alors : $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$, $\vec{n} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

Nous avons : $\overrightarrow{AB} = -2\,\vec{i} + \vec{j} - 6\,\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = -\vec{i} - 2\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

Soit $$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -15\,\vec{i} + 5\,\vec{k}$$

Le vecteur $\overrightarrow{W}$ est perpendiculaire au deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc aussi au vecteur $\overrightarrow{BC}$, alors il est perpendiculaire au plan (π) formé par ces trois vecteurs. On déduit le vecteur unitaire normal au plan (π) par : $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{W}}{W} = \frac{-15\,\vec{i} + 5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}$

On peut vérifier facilement :

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(-2\,\vec{i}+\vec{j}-6\,\vec{k}\right)=30-30=0$$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(-\,\vec{i}-2\,\vec{j}-3\,\vec{k}\right)=15-15=0$$

$$\vec{n}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)\bullet\left(\vec{i}-3\,\vec{j}+3\,\vec{k}\right)=-15+15=0$$

La composante, du vecteur, suivant la normale au plan s'écrirait :

$$\vec{V}_n=\left(\vec{V}\bullet\vec{n}\right)\vec{n}=\left(\left(3\,\vec{i}+\vec{j}-4\,\vec{k}\right)\bullet\frac{1}{\sqrt{106}}\left(-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}\right)\right)\vec{n}=-\frac{65}{\sqrt{106}}\vec{n}$$

$$\vec{V}_n=-\frac{65}{\sqrt{106}}\vec{n}=-\frac{65}{\sqrt{106}}\left(\frac{-15\,\vec{i}+5\,\vec{k}}{\sqrt{106}}\right)=\frac{1}{106}\left(975\,\vec{i}-325\,\vec{k}\right)$$

La composante dans le plan (π) se déduit par :

$$\vec{V}_\pi=\vec{V}-\vec{V}_n=\left(3\,\vec{i}+\vec{j}-4\,\vec{k}\right)-\frac{1}{106}\left(975\,\vec{i}-325\,\vec{k}\right)=\frac{1}{106}\left(-657\,\vec{i}+\vec{j}-99\,\vec{k}\right)$$

Exercice 15 :

Déterminer l'expression générale des vecteurs $\vec{W}$ orthogonaux aux vecteurs :

$\vec{V}_1=-\,\vec{i}+2\,\vec{j}+3\,\vec{k}$ et $\vec{V}_2=\vec{i}+3\,\vec{j}-5\,\vec{k}$. En déduire les vecteurs unitaires porté par $\vec{W}$.

Exercice 16 :

Soient trois vecteurs libres $\vec{U},\ \vec{V},\ \vec{W}$; montrer qu'il vérifient la relation suivante :

$$\vec{U}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)+\vec{W}\wedge\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)+\vec{V}\wedge\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)=\vec{0}$$

Solution :

On utilise la formule de développement du double produit vectoriel.

$$\vec{U}\wedge\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right)=\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)$$

$$\vec{W}\wedge\left(\vec{U}\wedge\vec{V}\right)=\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)$$

$$\vec{V}\wedge\left(\vec{W}\wedge\vec{U}\right)=\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)$$

La somme des trois termes donne :

$$\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)+\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)+\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=$$

$$\vec{V}\left(\vec{U}\bullet\vec{W}\right)-\vec{V}\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)-\vec{W}\left(\vec{U}\bullet\vec{V}\right)+\vec{W}\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)+\vec{U}\left(\vec{W}\bullet\vec{V}\right)-\vec{U}\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=\vec{0}$$

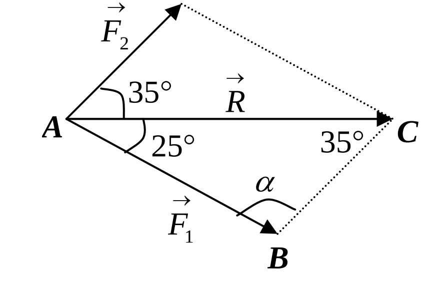
Comme le produit scalaire est commutatif alors :

$$\left(\vec{V}-\vec{V}\right)\left(\vec{W}\bullet\vec{U}\right)+\left(\vec{W}-\vec{W}\right)\left(\vec{V}\bullet\vec{U}\right)+\left(\vec{U}-\vec{U}\right)\left(\vec{V}\bullet\vec{W}\right)=\vec{0}$$

Exercice 17 :

Soient deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ faisant chacune respectivement un angle de *25°* et *35°* avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de *400 N*. Déterminer les modules des deux forces.

Solution :



Utilisons la règle des sinus :

$$\frac{BC}{\sin 25°}=\frac{AB}{\sin 35°}=\frac{AC}{\sin\alpha}$$

$\alpha=180°-(25°+35°)=120°$

or nous avons : $AB=F_1$, $BC=F_2$ et $AC=R$

D'où : $F_2=R\dfrac{\sin 25°}{\sin 120°}=195N$ et $F_1=R\dfrac{\sin 35°}{\sin 120°}=265N$

Exercice 18 :

Soit $\vec{P}=2t\,\vec{i}+5t^2\,\vec{j}-7t^3\,\vec{k}$, $\vec{Q}=-4t^3\,\vec{i}+10t^2\,\vec{j}-2t\,\vec{k}$

1) Vérifier les relations suivantes : $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{P}\bullet\vec{Q}\right)=\dfrac{d\vec{P}}{dt}\bullet\vec{Q}+\vec{P}\bullet\dfrac{d\vec{Q}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}\wedge\vec{Q}\right)=\frac{d\vec{P}}{dt}\wedge\vec{Q}+\vec{P}\wedge\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

2) Calculer les produits suivants : $\vec{P} \bullet \left(\vec{P} \wedge \vec{Q}\right)$ et $\vec{P} \wedge \left(\vec{P} \wedge \vec{Q}\right)$

Soit un vecteur $\vec{U} = \alpha\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} - \vec{k}$; quelle est la valeur de α pour que le vecteur $\vec{U}$ soit perpendiculaire à $\vec{P}$.

3) Déterminer le volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{U}, \vec{P}, \vec{Q}$;

4) Déterminer la composante de $\vec{Q}$ sur l'axe Δ passant par les points *A(0,0,1)* et *B(1,2,1)*

Exercice 19 :

Soit f un scalaire et $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ trois vecteurs quelconques, vérifier les relations suivantes :

1) $div(f\,\vec{A}) = f div\,\vec{A} + \vec{A} \bullet \overrightarrow{grad f}$;

2) $\vec{rot}(f\,\vec{A}) = \overrightarrow{grad f} \wedge \vec{A} + f\,\vec{rot}\,\vec{A}$

3) $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \bullet \vec{B})$;

4) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot A}) = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\,\vec{A}$;

5) $\vec{rot}(\overrightarrow{grad f}) = \vec{0}$;

6) $div(\vec{rot}\,\vec{A}) = \vec{0}$

7) $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \bullet \overrightarrow{rot A} - \vec{A}\,\overrightarrow{rot B}$

Solution :

1) $div(f\,\vec{A}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(fA_z)$

$$= f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= f div\,\vec{A} + \vec{A} \bullet \overrightarrow{grad f}$$

2) $$\vec{rot}(f\,\vec{A}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} fA_x \\ fA_y \\ fA_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial fA_z}{\partial y} - \dfrac{\partial fA_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial fA_x}{\partial z} - \dfrac{\partial fA_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial fA_y}{\partial x} - \dfrac{\partial fA_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\dfrac{\partial A_z}{\partial y} + A_z\dfrac{\partial f}{\partial y} - f\dfrac{\partial A_y}{\partial z} - A_y\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f\dfrac{\partial A_x}{\partial z} + A_x\dfrac{\partial f}{\partial z} - f\dfrac{\partial A_z}{\partial x} - A_z\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f\dfrac{\partial A_y}{\partial x} + A_y\dfrac{\partial f}{\partial x} - f\dfrac{\partial A_x}{\partial y} - A_x\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) + A_z \dfrac{\partial f}{\partial y} - A_y \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) + A_x \dfrac{\partial f}{\partial z} - A_z \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ f\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) + A_y \dfrac{\partial f}{\partial x} - A_x \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{gradf} \wedge \vec{A} + f\ rot\,\vec{A}$$

3) $$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_y C_z - B_z C_y \\ B_z C_x - B_x C_z \\ B_x C_y - B_y C_x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_y\left(B_x C_y - B_y C_x\right) - A_z\left(B_z C_x - B_x C_z\right) \\ A_z\left(B_y C_z - B_z C_y\right) - A_x\left(B_x C_y - B_y C_x\right) \\ A_x\left(B_z C_x - B_x C_z\right) - A_y\left(B_y C_z - B_z C_y\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z + A_x B_x C_x - A_x B_x C_x \\ A_z B_z C_x - A_z B_x C_z - A_x B_x C_y + A_x B_y C_x + A_y B_y C_y - A_y B_y C_y \\ A_x B_z C_x - A_x B_x C_z - A_y B_y C_z + A_y B_z C_y + A_z B_z C_z - A_z B_z C_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_x\left(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z\right) - C_x\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) \\ B_y\left(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z\right) - C_y\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) \\ B_z\left(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z\right) - C_z\left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) \end{pmatrix}$$

$$= \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \bullet \vec{B})$$

4) $$\vec{rot}(\overrightarrow{rotA}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) A_z \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad}(div\,\vec{A}) - \Delta\,\vec{A}$$

5) $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

D'une autre manière :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\ f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = f\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\right) = \vec{0}$$

6) $div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$

D'une autre manière :

$div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right)$ soit $\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}\right) = \vec{B}$ les vecteurs $\vec{\nabla}$ et $\vec{A}$ sont perpendiculaires au vecteur résultat $\vec{B}$. Nous avons alors : $div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{B}$

Comme $\vec{\nabla} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$ d'où : $div(\overrightarrow{rot}\ \vec{A}) = 0$

7) $div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(A_y B_z - A_z B_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_z B_x - A_x B_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_x B_y - A_y B_x\right)$$

$$= B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$-A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)-A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

$$div(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\bullet\overrightarrow{rot}A-\vec{A}\,\overrightarrow{rot}B$$

Exercice 20 :

Soit un vecteur $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ exprimé dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Calculer $\overrightarrow{grad}(r)$ et $\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$;

2) Si $U(r)$ est un champ scalaire à symétrie sphérique, montrer que $\overrightarrow{grad}(U(r))$ est un vecteur radial ;

3) Calculer $div(\vec{r})$ et en déduire que pour un champ électrique Coulombien : $\vec{E}=k\frac{\vec{r}}{r}$ on a $div\,\vec{E}=\vec{0}$;

4) Montrer que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$ avec $r\neq 0$;

5) Calculer $\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}\right)$

Solution :

1) Nous avons : $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{1}{r}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\overrightarrow{grad}(r)=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{i}+y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{j}+z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\vec{k}$$

$$=\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k}$$

$$=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\vec{i}-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\vec{j}-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\vec{k}$$

$$=-\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

2) $$\overrightarrow{grad}\left(U(r)\right)=\frac{\partial U(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(r)}{\partial z}\vec{k}=\frac{\partial U(r)}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{\partial U(r)}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)=\frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

3) $$div\left(\vec{r}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\bullet\left(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\right)=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

4) $$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=div\left(grad\left(\frac{1}{r}\right)\right)=div\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{1}{r^3}.3+\vec{r}\bullet\overrightarrow{grad}\left(-\frac{1}{r^3}\right)$$

$$=-\frac{1}{r^3}.3+\vec{r}\bullet\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^3}\right)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{r^3}\right)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r^3}\right)\vec{k}\right)$$

nous avons : $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^3}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^3}\right).\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{3r^2}{r^6}.\frac{x}{r}=\frac{3x}{r^5}$

de même pour y et z : $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{r^3}\right)=\frac{3y}{r^5}$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r^3}\right)=\frac{3z}{r^5}$

alors, nous obtenons :

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}.3+\vec{r}\bullet\left(\frac{3x}{r^5}\vec{i}+\frac{3y}{r^5}\vec{i}+\frac{3z}{r^5}\vec{i}\right)=-\frac{1}{r^3}.3+\frac{3}{r^5}\vec{r}\bullet\vec{r}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3}{r^3}=0$$

5) $$\overrightarrow{rot}\left(\vec{r}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Car x , y , z : sont des variables indépendantes

CHAPITRE II

LES TORSEURS

LES TORSEURS

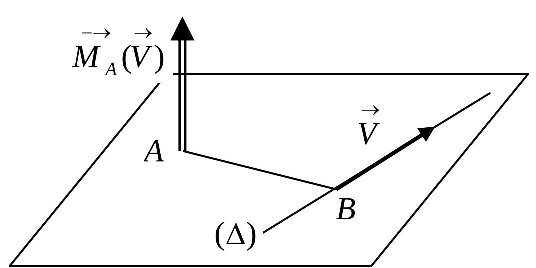
Les torseurs sont des outils mathématiques très utilisés en mécanique. L'utilisation des torseurs dans l'étude des systèmes mécaniques complexes est très commode car elle facilite l'écriture des équations vectorielles. Une équation vectorielle représente trois équations scalaires et une équation torsorielle est équivalente à deux équations vectorielles donc à six équations scalaires. Nous verrons dans les prochains chapitres quatre types de torseurs différents : le torseur cinématique, le torseur cinétique, le torseur dynamique et le torseur des actions.

1. Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment $\overrightarrow{M_A}$ d'un vecteur $\vec{V}$ d'origine B (glissant ou lié) par rapport à un point A est égal au produit vectoriel du vecteur position $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\vec{V}$.

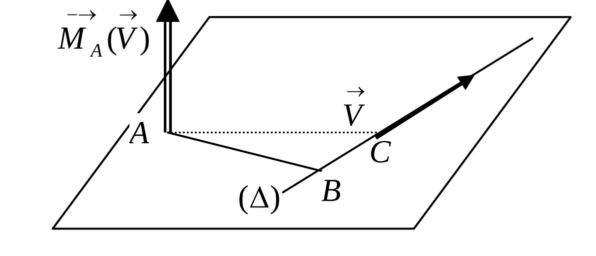
Il s'écrit : $\overrightarrow{M_A}(\vec{V}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$

Le trièdre formé respectivement par les vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \vec{V}, \overrightarrow{M_A})$ est direct.



Remarque :

Le moment au point A est indépendant de la position du vecteur $\vec{V}$ sur l'axe (Δ). En effet nous avons :



$$\overrightarrow{M_A}(\vec{V}) = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{V}$$

Or nous avons : $\overrightarrow{BC} \ // \ \vec{V} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{V} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{V}) = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$$

Le moment $\overrightarrow{M_A}(\vec{V})$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}$.

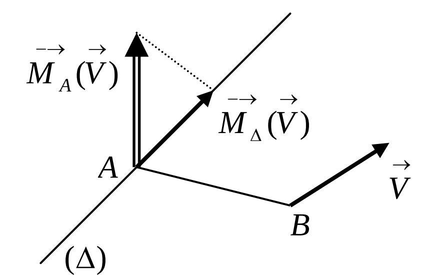
La distance AB est souvent appelée bras de levier.

2. Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment $\overrightarrow{M_\Delta}(\vec{V})$ d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe (Δ) défini par un point A et un vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal à la projection du moment $\overrightarrow{M_A}(\vec{V})$ sur l'axe (Δ).

$$\overrightarrow{M_\Delta}(\vec{V}) = \left(\overrightarrow{M_A}(\vec{V}) \bullet \vec{u}\right)\vec{u}$$

Le moment par rapport à l'axe Δ est indépendant du point A.



3. Les torseurs

3.1. Définition

Un torseur que nous noterons $[T]$ est défini comme étant un ensemble de deux champs de vecteurs définis dans l'espace géométrique et ayant les propriétés suivantes :

a) Le premier champ de vecteurs fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur $\vec{R}$ indépendant du point A et appelé résultante du torseur $[T]$;

b) Le second champ de vecteur fait correspondre à tout point A de l'espace un vecteur $\overrightarrow{M_A}$ qui dépend du point A. Le vecteur $\overrightarrow{M_A}$ est appelé moment au point A du torseur $[T]$.

3.2. Notation

La résultante $\vec{R}$ et le moment résultant $\overrightarrow{M_A}$ au point A, constituent les éléments de réduction du torseur au point A.

Soit $\vec{R}$ la résultante des n vecteurs glissants : $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{V_n}$ appliqués respectivement aux points : $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots\ldots B_n$. Nous pouvons définir à partir de ce système de vecteurs deux grandeurs :

- La résultante des n vecteurs : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i}$;
- Le moment résultant en un point A de l'espace est donné par : $\overrightarrow{M_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AB_i} \wedge \vec{V_i}$

Les deux grandeurs constituent le torseur développé au point A associé au système de vecteurs donnés. On adopte la notation suivante : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{cases}$

Remarque : Un torseur n'est pas égal à un couple de vecteur, mais il est représenté au point A par ses éléments de réduction.

4. Propriétés des vecteurs moments

4.1. Formule de transport des moments

Connaissant le Torseur $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{V}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i \end{cases}$ en un point A de l'espace nous pouvons déterminer les éléments de réduction de ce même torseur en un autre point C de l'espace.

Le moment au point C s'exprime en fonction du moment au point A , de la résultante $\vec{R}$ et du vecteur $\vec{CA}$. Nous avons en effet :

$$\vec{M}_C = \sum_{i=1}^{n} \vec{CB}_i \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{CA} + \vec{AB}_i) \wedge \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{CA} \wedge \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i = \vec{CA} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{AB}_i \wedge \vec{V}_i$$

$$\vec{M}_C = \vec{CA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A$$

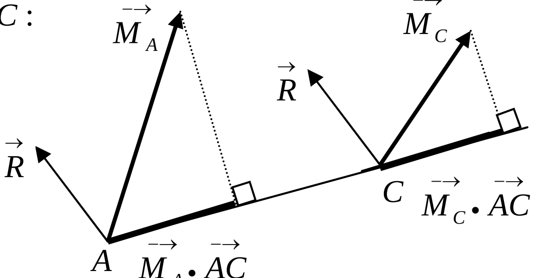
$$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R}$$

Cette relation très importante en mécanique permet de déterminer le moment en un point C en connaissant le moment au point A.

4.2. Equiprojectivité des vecteurs moments

Les vecteurs moments $\vec{M}_A$ au point A et $\vec{M}_C$ au point C ont la même projection sur la droite AC :

On dit que le champ des vecteurs moments, est équiprojectif.



$$\vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{R}$$

La projection du vecteur moment sur l'axe CA revient à faire le produit scalaire avec le vecteur $\overrightarrow{CA}$ à un facteur multiplicatif près. Nous avons par la formule de transport :

$$\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Multiplions cette relation scalairement par le vecteur $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{CA} \bullet \left(\overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R} \right) = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{CA} \bullet (\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R})$$

or $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R}$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{CA}$ alors : $\overrightarrow{CA} \bullet (\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{R}) = 0$

on obtient finalement :

$$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{M}_A \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{M}_C \bullet \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{M}_A \bullet \overrightarrow{CA}$$

Le produit scalaire est commutatif.

Cette expression exprime que les projections des vecteurs moments $\overrightarrow{M}_C$ et $\overrightarrow{M}_A$ sur la droite CA sont égales.

5. Opérations vectorielles sur les torseurs

5.1. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux (équivalents), si et seulement si, il existe un point de l'espace en lequel les éléments de réduction sont respectivement égaux entre eux. Soient deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ tel que : $[T_1]_P = [T_2]_P$ égaux au point *P*, cette égalité se traduit par deux égalités vectorielles : $[T_1]_P = [T_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M}_{1P} = \overrightarrow{M}_{2P} \end{cases}$

5.2. Somme de deux torseurs

La somme de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ est un torseur $[T]$ dont les éléments de réduction $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_P$ sont respectivement la somme des éléments de réduction des deux torseurs.

$$[T]_P = [T_1]_P + [T_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad [T]_P = \begin{cases} \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{M}_{1P} + \overrightarrow{M}_{2P} \end{cases}$$

5.3. Multiplication d'un torseur par un scalaire

Si $[T]_P = \lambda\ [T_1]_P \quad \Leftrightarrow \quad [T]_P = \begin{cases} \vec{R} = \lambda\ \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{M}_P = \lambda\ \overrightarrow{M}_{1P} \end{cases}$ avec $\lambda \in IR$

5.4. Torseur nul

Le torseur nul, noté $[0]$ est l'élément neutre pour l'addition de deux torseurs. Ses éléments de réduction sont nuls en tout point de l'espace.

$$[0] = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_P = \vec{0} \end{cases} \qquad \forall P \in IR^3$$

6. Invariants du torseur

6.1 Définition

On appelle invariant d'un torseur $[T]_P$ toute grandeur indépendante du point de l'espace où elle est calculée.

6.2 Invariant vectorielle d'un torseur

La résultante $\vec{R}$ est un vecteur libre, indépendant du centre de réduction du torseur, elle constitue l'invariant vectorielle du torseur $[T]_P$

6.3 Invariant scalaire d'un torseur ou automoment

L'invariant scalaire d'un torseur donné, est par définition le produit scalaire des éléments de réductions en un point quelconque de ce torseur.

Le produit scalaire $\vec{R} \bullet \overrightarrow{M}_A$ est indépendant du point A. Nous avons vu précédemment la formule de transport : $\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}$; en faisant le produit scalaire de cette relation par la résultante $\vec{R}$, on obtient :

$$\overrightarrow{M}_C \bullet \vec{R} = \left(\overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} \right) \bullet \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M}_C \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M}_A \bullet \vec{R} + \left(\overrightarrow{CA} \wedge \vec{R} \right) \bullet \vec{R}$$

$$\overrightarrow{M}_C \bullet \vec{R} = \overrightarrow{M}_A \bullet \vec{R}$$

on voit bien que le produit scalaire, des deux éléments de réduction d'un torseur, est indépendant du point où est mesuré le moment.

7. Axe central d'un torseur

7.1. Définition

Soit un torseur donné de résultante non nulle. L'axe central (Δ) est défini par l'ensemble des points P de l'espace tel que le moment du torseur en ce point, soit parallèle à la résultante.

$$\forall\, P \in \Delta \;\Rightarrow\; \overrightarrow{M}_P = \alpha\, \vec{R} \qquad \text{avec} \quad \alpha \in IR$$

L'axe central d'un torseur est parallèle à la droite support de la résultante du torseur :

Démonstration :

Soient P et P' deux points de l'axe central, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{M}_P = \alpha\, \vec{R}$ et $\overrightarrow{M}_{P'} = \alpha'\, \vec{R}$ car les deux moments sont parallèles à $\vec{R}$

et nous avons aussi par la formule de transport :

$$\overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{M}_{P'} + \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$$

$$\alpha\, \vec{R} = \alpha'\, \vec{R} + \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} \;\Rightarrow\; (\alpha - \alpha')\, \vec{R} = \overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$$

Par définition le vecteur résultat de $\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{PP'}$ et $\vec{R}$ ou nul.

La seule possibilité ici est, qu'il soit nul, alors dans ce cas : $\alpha = \alpha'$ et $\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PP'} \wedge \vec{R} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PP'} \,//\, \vec{R}$: d'où l'axe central est parallèle à la résultante du torseur.

Nous allons montrer aussi que l'axe central est le lieu des points ou le module du moment $\left\| \overrightarrow{M}_P \right\|$ *du torseur est minimum.*

Soit P un point appartenant à l'axe central et soit A un point quelconque de l'espace n'appartenant pas à l'axe central. Nous pouvons écrire par la formule de transport :

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_P + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{R}$$

on déduit alors :

$\left\| \overrightarrow{M}_A \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{M}_P \right\|^2 + \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{R} \right)^2 + 2\, \overrightarrow{M}_P \bullet \left(\overrightarrow{AP} \wedge \vec{R} \right)$ or nous avons : $\overrightarrow{M}_P = \alpha\, \vec{R}$

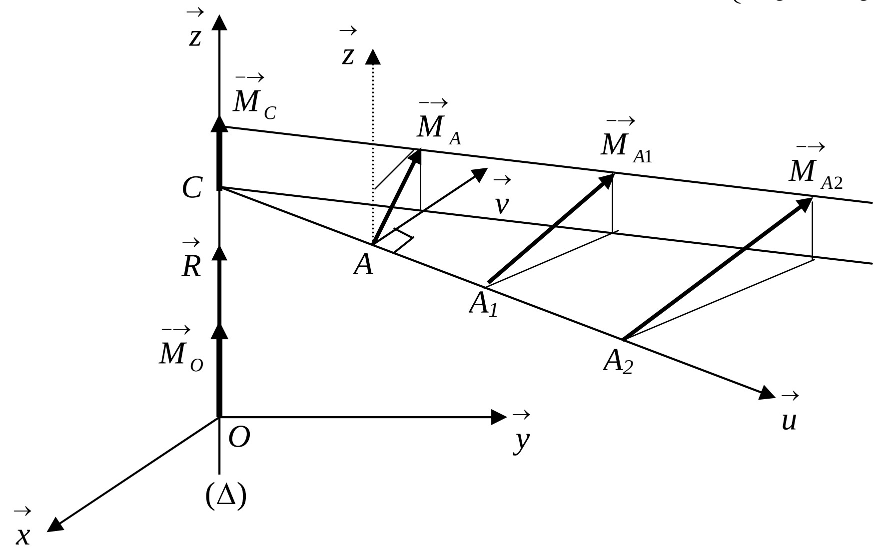
$$\left\|\overrightarrow{M}_A\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{M}_P\right\|^2 + \left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{R}\right)^2 + 2\alpha\,\vec{R}\bullet\left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{R}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{M}_A\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{M}_P\right\|^2 + \left(\overrightarrow{AP}\wedge\vec{R}\right)^2 \quad > \left\|\overrightarrow{M}_P\right\|^2$$

Quel que soit P appartenant à l'axe central le moment en ce point est minimum.

7.2. Symétrie du champ des moments d'un torseur

Soit un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ dont l'axe vertical est confondu avec l'axe central $(\Delta)=(O,\vec{z})$ du torseur défini au point O par : $[T]_O = \begin{cases} \vec{R} = R\,\vec{z} \\ \overrightarrow{M}_O = M_O\,\vec{z} \end{cases}$



On défini un autre repère local orthonormé direct en un point A quelconque de l'espace tel que l'axe Oz reste confondu : $R(A,\vec{u},\vec{v},\vec{z})$ tel que $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{z}$)

L'axe $(A,\vec{u})$ rencontre l'axe $(O,\vec{z})$ en un point C.

On pose $\overrightarrow{OC} = h\,\vec{z}$ et $\overrightarrow{CA} = L\,\vec{u}$ d'où $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = h\,\vec{z} + L\,\vec{u}$

Par la formule de transport nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_O + \vec{R}\wedge\overrightarrow{OA} = M_O\,\vec{z} + R\,\vec{z}\wedge(h\,\vec{z} + L\,\vec{u})$$

$$\overrightarrow{M}_A = M_O\,\vec{z} + R\,L\,\vec{v}$$

D'après cette relation, on constate que les vecteurs moments autour de l'axe central sont situés dans le plan $(\vec{v}, \vec{z})$.

- Si $L = Cte$ alors : $\overrightarrow{M_A} \bullet \vec{z} = M_O\, \vec{z} \bullet \vec{z} + RL\, \vec{z} \bullet \vec{u} = M_O$;
- Le module du moment $\overrightarrow{M_A}$ est constant si $L = Cte$: $M_A = \sqrt{(M_O)^2 + (RL)^2}$

On remarque que les vecteurs moments situés à une même distance L de l'axe central (Δ) sont tangents au cylindre de révolution de même axe (Δ).

On constate aussi que lorsque le point A où est mesuré le moment se déplace le long de l'axe $(C, \vec{u})$, le moment en ce point fait des rotations. Nous avons alors

- pour $L = 0$ $\overrightarrow{M_A}$ est parallèle à $\vec{z}$
- pour $L \to \infty$ $\overrightarrow{M_A}$ est orthogonal à l'axe $\vec{z}$

On constate donc une torsion du moment lorsque le point A s'éloigne de l'axe central du torseur, c'est de là que vient l'origine du mot torseur.

7.3. Equation vectorielle de l'axe central

Soit O l'origine des coordonnées dans un repère orthonormé et (Δ) l'axe central d'un torseur $[T]$. Nous avons : $\forall P \in (\Delta) \Rightarrow \overrightarrow{M_P} = \lambda\, \vec{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_P} \,//\, \vec{R} \Rightarrow \overrightarrow{M_P} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

Et $\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{PO} \wedge \vec{R} \Rightarrow \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_P} = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$

En utilisant la propriété du double produit vectoriel, on aboutit à :

$$\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{PO}(\vec{R}^2) - \vec{R}\,(\vec{R} \bullet \overrightarrow{PO}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OP}(\vec{R}^2) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O} - \vec{R}\,(\vec{R} \bullet \overrightarrow{PO}) \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2} + \frac{(\vec{R} \bullet \overrightarrow{OP})}{\vec{R}^2}\vec{R}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2} + \frac{(\vec{R} \bullet \overrightarrow{OP})}{\vec{R}^2}\vec{R}$$

Le premier terme de cette équation est indépendant du point P, on peut le noter comme étant un vecteur $\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2}$ et le second terme dépend du point P car c'est un vecteur parallèle à $\vec{R}$. On pose $\dfrac{(\vec{R} \bullet \overrightarrow{OP})}{\vec{R}^2} = \lambda$ d'où : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \vec{R}$

L'axe central du torseur $[T]$ passe par le point P_0 défini à partir de O par l'équation :

$\overrightarrow{OP_0} = \dfrac{\vec{R} \wedge \overrightarrow{M_O}}{\vec{R}^2}$ et parallèle à $\vec{R}$ donc au vecteur unitaire : $\vec{u} = \dfrac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$.

7.4. Pas du torseur

Nous savons que pour tout point P de l'axe central nous avons : $\overrightarrow{M_P} = \lambda \vec{R}$

Le produit scalaire de cette expression par l'invariable vectorielle $\vec{R}$ donne :

$$\overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R} = \lambda \vec{R} \bullet \vec{R} \qquad \text{d'où :} \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R}}{\vec{R}^2}$$

Comme le produit $\overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R}$ est l'invariant scalaire du torseur, la valeur λ est indépendante du point P. λ est appelée ‘‘ ***Pas du torseur’’*** elle n'est définie que si : $\vec{R} \neq \vec{0}$

8. Torseurs particuliers

8.1. Glisseur

8.1.1. Définition

Un torseur de résultante non nulle est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul. Cette définition peut se traduire par : $[T]$ est un glisseur $\Leftrightarrow \begin{cases} I[T] = \overrightarrow{M_P} \bullet \vec{R} = 0 \quad \forall P, \\ avec \quad \vec{R} \neq \vec{0} \end{cases}$

On sait que l'invariant scalaire est indépendant du point P où il est calculé. Comme la résultante n'est pas nulle alors on peut dire que : un torseur est un glisseur, si et seulement si, il existe au moins un point en lequel le moment du torseur est nul.

8.1.2. Moment en un point d'un glisseur

Soit $[T]$ un glisseur donné. Il existe au moins un point où le moment du glisseur est nul.

Soit A ce point, nous pouvons écrire : $\vec{M}_A = \vec{0}$,

Par la formule de transport le moment en un point P quelconque s'écrit :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_A + \vec{R} \wedge \vec{AP}$$

$$\vec{M}_P = \vec{R} \wedge \vec{AP}$$

Cette relation exprime le vecteur moment en un point P quelconque d'un glisseur dont le moment est nul au point A.

8.1.3. Axe d'un glisseur

Soit $[T]$ un glisseur donné et A un point quelconque tel que : $\vec{M}_A = \vec{0}$,

Cherchons l'ensemble des points P pour lesquels le moment du torseur est nul :

Si $\vec{M}_P = \vec{0} \iff \vec{R} \wedge \vec{AP} = \vec{0}$; cette relation montre que le vecteur $\vec{AP}$ est colinéaire à la résultante $\vec{R}$.

L'ensemble des points P est déterminé par la droite passant par le point A et de vecteur unitaire parallèle à la résultante $\vec{R}$.

Cette droite est appelée axe des moments nul du glisseur ou axe du glisseur. Elle représente l'axe central du glisseur.

Un torseur de résultante non nulle est un glisseur, si et seulement si, son invariant scalaire est nul.

8.2. Torseur couple

8.2.1. Définition

Un torseur non nul est un torseur couple, si et seulement si, sa résultante est nulle.

Cette définition se traduire par : $[T]$ est un torseur couple $\iff \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \exists\ P \ \text{tel que} : \vec{M}_P \neq \vec{0} \end{cases}$

8.2.2. Propriétés du vecteur moment

Le moment d'un torseur couple est indépendant des points de l'espace où il est mesuré.

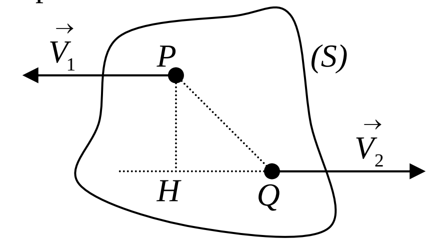
Nous avons : $V_1 = V_2$ tel que :

$$\vec{R} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V_2} = -\vec{V_1}$$

Le moment en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V_1} + \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V_2} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V_1} - \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V_1}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V_1} - \overrightarrow{AQ} \wedge \vec{V_1} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V_1}$$



On voit bien que le moment au point A est indépendant du A. on va montrer qu'il est aussi indépendant des points P et Q.

En effet nous avons : $\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V_1} = (\overrightarrow{QH} + \overrightarrow{HP}) \wedge \vec{V_1} = \overrightarrow{HP} \wedge \vec{V_1}$

H est la projection orthogonale du point P sur la droite support du vecteur $\vec{V_2}$.

En réalité le moment d'un torseur couple ne dépend que de la distance qui sépare les deux droites supports des deux vecteurs, il est indépendant du lieu où il est mesuré.

8.2.3. Décomposition d'un torseur couple

Soit $[T_C]$ un torseur couple défini par : $[T_C] = \begin{cases} \vec{0} \\ \overrightarrow{M} \end{cases}$. Ce torseur couple peut être décomposé en deux glisseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ tel que : $[T_C] = [T_1] + [T_2]$ où les deux glisseurs sont définis comme suit : $[T_C] = \begin{cases} \vec{R_1} + \vec{R_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_{1P}} + \overrightarrow{M_{2P}} \end{cases}$ où P est un point quelconque

Les invariants des deux glisseurs sont nuls: $I_1 = \overrightarrow{M_{1P}} \bullet \overrightarrow{R_1} = 0$; $I_2 = \overrightarrow{M_{2P}} \bullet \overrightarrow{R_2} = 0$

Il existe une infinité de solution équivalente à un torseur couple.

Le problème est résolu de la manière suivante :

a) on choisis un glisseur $[T_1]$ en se donnant :

- la résultante du glisseur : $\vec{R_1}$;

- l'axe (Δ_1) du glisseur, défini par un point P_1 tel que : $(\Delta_1) = (P_1, \vec{R_1})$

b) Le glisseur $[T_2]$ est défini alors par :

- sa résultante $\vec{R_2} = -\vec{R_1}$;
- son axe (Δ_2) est déterminé facilement car il est parallèle à (Δ_1) ; il suffit alors de connaître un point P_2 de cet axe. Le point P_2 est déterminé par la relation suivante :

$$\vec{R_1} \wedge \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{M}$$

Cette relation détermine la position du point P_2 de façon unique.

9. Torseur quelconque

9.1. Définition

Un torseur est quelconque, si et seulement si, son invariant scalaire n'est pas nul.

$$[T] \text{ est un torseur quelconque } \Leftrightarrow \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_P} \neq \vec{0}$$

9.2. Décomposition d'un torseur quelconque

Un torseur $[T]$ quelconque peut être décomposé d'une infinité de façon en la somme d'un torseur glisseur $[T_1]$et d'un torseur couple$[T_2]$.

Nous procédons de la manière suivante :

a) Choix du point *P*

On choisit un point P où les éléments de réduction du torseur $[T]$ sont connus : $[T] = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_P} \end{cases}$

Le choix du point P dépendra du problème à résoudre, on choisit le point le plus simple à déterminer. Une fois que le choix est fait, la décomposition du torseur quelconque est unique.

b) Construction du glisseur $[T_1]$

- la résultante égale à la résultante du torseur quelconque : $\vec{R_1} = \vec{R}$, avec son axe qui passe par le point P déjà choisi ;
- Le moment est nul sur cet axe : $\overrightarrow{M_{1P}} = \vec{0}$

Le glisseur $[T_1]$ aura pour éléments de réduction : $[T_1]=\begin{cases}\vec{R_1}=\vec{R}\\ \overrightarrow{M_{1P}}=\vec{0}\end{cases}$

c) Construction du torseur couple $[T_2]$

- la résultante est nulle : $\vec{R_2}=\vec{0}$,
- Le moment du torseur couple est égal au moment du torseur quelconque: $\overrightarrow{M_{2P}}=\overrightarrow{M_P}$

Le glisseur $[T_1]$ aura pour éléments de réduction : $[T_2]=\begin{cases}\vec{R_2}=\vec{0}\\ \overrightarrow{M_{2P}}=\overrightarrow{M_P}\end{cases}$

On obtient ainsi $[T]=[T_1]+[T_2]$

En chaque point choisi initialement nous pouvons faire cette construction. Tous les glisseurs obtenus auront la même résultante. Ils différent par leurs axes mais gardent la même direction car ils sont tous parallèles à l'axe portant la résultante du torseur quelconque.

10. Tableau récapitulatif sur les torseurs

Eléments de réduction au point *A*	Construction minimum	Type de torseur
$\vec{R}\neq\vec{0}$ $\vec{R}\bullet\overrightarrow{M_A}=\vec{0}$	Un vecteur lié unique	Torseur glisseur
$\vec{R}=\vec{0}$ $\overrightarrow{M_A}\neq\vec{0}$	Deux vecteurs liés formant un couple	Torseur couple
$\vec{R}\bullet\overrightarrow{M_A}\neq\vec{0}$	Un vecteur lié + 2 vecteurs liés formant un couple	Torseur quelconque
$\vec{R}=\vec{0}$ $\overrightarrow{M_A}=\vec{0}$	Vecteurs nuls	Torseur nul

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice : 01

Dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, deux points A et B ont pour coordonnées :

A(2, 2, -3) et *B(5, 3, 2)* ; Déterminer :

1) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère ;
2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite (Δ) passant par le point O et le point *C(2, 2, 1)*

Solution :

1) Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O est donné par :

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -4 \end{pmatrix} = 13\,\vec{i} - 19\,\vec{j} - 4\,\vec{k} \;;$$

2) Moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point à la droite (Δ) définie par le point O et le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{3}\left(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{M_\Delta} = \left(\overrightarrow{M_O} \bullet \vec{u}\right)\vec{u} = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ -4 \end{pmatrix} \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\vec{u} = \frac{1}{3}(26 - 38 - 4)\,\vec{u} = -\frac{16}{3}\vec{u} \;;$$

Exercice : 02

Soient les trois vecteurs $\vec{V}_1 = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{V}_3 = \vec{i} - \vec{j}$ définis dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et liés respectivement au points $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$

1) Construire le torseur $[T]_O$ associé au système de vecteurs $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$;
2) En déduire l'automoment ;
3) Calculer le pas du torseur ;
4) Déterminer l'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Solution :

1) Les éléments de réduction du torseur $[T]_O$ sont :

La résultante : $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = \vec{j} + 3\vec{k}$

Le moment au point O : $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{V}_1 + \vec{OB} \wedge \vec{V}_2 + \vec{OC} \wedge \vec{V}_3$

$$\vec{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) L'automoment : $A = \vec{R} \bullet \vec{M}_O = \left(\vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right) = -2 - 3 = -5$

3) Pas du torseur : $p = \dfrac{\vec{R} \bullet \vec{M}_O}{R^2} = \dfrac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = -\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

4) Equation vectorielle de l'axe central :

Si l'axe (Δ) est un axe central alors : $\forall \ P \in (\Delta) \ \Rightarrow \ \vec{M}_P = \lambda \vec{R}$

Son équation vectorielle est donnée par : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \vec{R}$ avec $\lambda \in IR$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\vec{i}+\left(-\frac{3}{10}+\lambda\right)\vec{j}+\left(\frac{1}{10}+3\lambda\right)\vec{k}$$

Si $\overrightarrow{OP}= \begin{cases}x\\y\\z\end{cases}_{R_0}$ alors : $x=\frac{1}{2}$; $y=-\frac{3}{10}+\lambda$ et $z=\frac{1}{10}+3\lambda$

D'où : $z=\frac{1}{10}+3\left(y+\frac{3}{10}\right)=\frac{1}{10}+3y+\frac{9}{10}=3y+1$

L'axe central est une droite dans un plan parallèle au plan *(yOz)* situé à $x=\frac{1}{2}$ et

d'équation : $z=3y+1$

Exercice : 03

Soit le torseur $[T_1]_O$ défini par les trois vecteurs $\vec{V_1}=-2\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$; $\vec{V_2}=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$,

$\vec{V_3}=-\vec{i}-2\vec{j}+8\vec{k}$ définis dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ respectivement au points

$A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$; et le torseur $[T_2]_O=\begin{cases}\vec{R_2}\\ \overrightarrow{M_{20}}\end{cases}$ où $\vec{R_2}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ et

$\overrightarrow{M_{20}}=-3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_O$, conclusion;

2) Déterminer le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_O$;

3) Calculer la somme et le produit des deux torseurs ;

4) Calculer l'automoment du torseur somme .

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur: $[T_1]_O=\begin{cases}\vec{R_1}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}\\ \overrightarrow{M_{1O}}=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V_1}+\overrightarrow{OB}\wedge\vec{V_2}+\overrightarrow{OC}\wedge\vec{V_3}\end{cases}$

$$\vec{R_1}=\vec{V_1}+\vec{V_2}+\vec{V_3}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{M_{1O}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\3\\-7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\-2\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix} = \vec{i} + 6\vec{j}$$

$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R_1} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{1O}} = \vec{i} + 6\vec{j} \end{cases}$$

2) Pas et axe central du torseur $[T_2]_O$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R_2} \bullet \overrightarrow{M_2}}{R_2^2} = \dfrac{\left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right)}{4+1+9} = \dfrac{-3+2-21}{14} = -\dfrac{11}{7}$

Axe central du torseur : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R_2} \wedge \overrightarrow{M_2}}{R_2^2} + \lambda \vec{R_2}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-13\\5\\7\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{13}{14} + 2\lambda \\ \dfrac{5}{14} + \lambda \\ \dfrac{1}{2} + 3\lambda\end{pmatrix}$$

3) Somme et produit des deux torseurs

a) Somme des deux torseurs :

$$[T]_O = [T_1]_O + [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R} = \vec{R_1} + \vec{R_2} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{1O}} + \overrightarrow{M_{2O}} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k} \end{cases}$$

b) Produit des deux torseurs :

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{R_1} \\ \overrightarrow{M_{1O}} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{2O}} \end{cases} = \vec{R_1} \bullet \overrightarrow{M_{2O}} + \vec{R_2} \bullet \overrightarrow{M_{1O}} = \left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}\right) = -25$$

4) Automoment du torseur somme :

$$F = \vec{R} \bullet \overrightarrow{M_O} = \left(2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(-2\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}\right) = -17$$

Exercice : 04

On considère les points $A(0, 1, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(1, 1, 1)$ et $D(0, 2, -1)$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer :

1) Les éléments de réduction du torseur associé aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$;

2) L'axe central du torseur vectoriellement et analytiquement.

Exercice : 05

Soit A un point de l'espace dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, avec $\overrightarrow{OA} = -\frac{21}{9}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} - \frac{12}{9}\vec{k}$ et un vecteur $\vec{V_1} = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ dont l'axe passe par le point A .

Soit $[T_2]_0$ un torseur défini au point O par ses éléments de réduction $\vec{R_2}$ et $\overrightarrow{M_{20}}$ tel que :

$$[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R_2} = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{20}} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur $[T_1]_0$ dont la résultante est le vecteur $\vec{V_1}$;

2) Pour quelle valeur de α les deux torseurs sont égaux ;

3) En déduire le pas et l'axe central du torseur $[T_2]_0$ pour cette valeur de α.

4) Calculer le produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Solution :

1) Eléments de réduction du torseur $[T_1]_0$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} \end{cases} \quad ; \text{ d'où } \quad \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{V_1} = \begin{pmatrix} -21/9 \\ -4/9 \\ -12/9 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix}$$

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{V_1} = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \overrightarrow{M_{10}} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$$

2) Les deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réductions sont égaux.

$$[T_1]_0 = [T_2]_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{V_1} = \vec{R_2} \\ \overrightarrow{M_{10}} = \overrightarrow{M_{20}} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} = (\alpha - 4)\vec{i} + \alpha\vec{j} + 3\alpha\vec{k} \\ 11\vec{j} - \frac{11}{3}\vec{k} = (2\alpha + 9)\vec{j} + (-3\alpha - \frac{2}{3})\vec{k} \end{cases}$$

Cette égalité est vérifiée pour : $\underline{\alpha = 1}$

4) Pas et axe central du torseur $[T_2]_0$ pour $\alpha = 1$.

Le torseur s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = 11\vec{j} - (11/3)\vec{k} \end{cases}$

Pas du torseur : $P_2 = \dfrac{\vec{R}_2 \bullet \vec{M}_{20}}{R_2^2} = \dfrac{1}{19}\left(-3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(11\vec{j} - \dfrac{11}{3}\vec{k}\right) = 0$

Axe central du torseur : C'est l'ensemble des point *P* tel que : $\vec{OP} = \dfrac{\vec{R}_2 \wedge \vec{M}_{20}}{R_2^2} + \lambda \vec{R}_2$

$$\vec{OP} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -11/3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{110}{57} - 3\lambda \\ -\dfrac{11}{19} + \lambda \\ -\dfrac{33}{19} + 3\lambda \end{pmatrix}$$

si *(x, y, z)* sont les coordonnées du point *P* alors : nous aurons les trois équations scalaires:

$$x = -\frac{110}{57} - 3\lambda \quad , \quad y = -\frac{11}{19} + \lambda \quad , \quad z = -\frac{33}{19} + 3\lambda$$

le point *P* décrit la courbe : $2x + 3y + z = -\dfrac{385}{57}$

5) Produit des deux torseurs pour $\alpha = 2$

Pour $\alpha = 2$ le torseur $[T_2]_0$ s'écrit : $[T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{M}_{20} = 13\vec{j} - \dfrac{20}{3}\vec{k} \end{cases}$

$$[T_1]_O \bullet [T_2]_O = \begin{cases} \vec{V}_1 \\ \vec{M}_{1O} \end{cases} \bullet \begin{cases} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2O} \end{cases} = \vec{V}_1 \bullet \vec{M}_{2O} + \vec{R}_2 \bullet \vec{M}_{1O} = -7$$

Exercice : 06

Soient deux torseurs $[T_1]_A$ et $[T_2]_A$ définis au même point A par leurs éléments de réduction dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$[T_1]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{1A} = 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R}_2 = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{2A} = 4\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} \end{cases}$$

1) Déterminer l'axe central et le pas du torseur $[T_1]_A$;

2) Déterminer l'automoment du torseur $[T_1]_A$, montrer qu'il est indépendant du point A ;

3) Construire le torseur $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A$ avec a et $b \in IR$;

4) Quelle relation doivent vérifier a et b pour que le torseur $[T]_A$ soit un torseur couple ;

5) Montrer que le torseur couple est indépendant du point ou on le mesure ;

6) Déterminer le système le plus simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

Solution :

1) Axe central et Pas du torseur $[T_1]_A$

Axe central : Il est défini par l'ensemble des points P tel que : $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\vec{R}_1 \wedge \overrightarrow{M}_{1A}}{R_1^2} + \lambda \vec{R}_1$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{17} - 3\lambda \\ -\frac{13}{17} + 2\lambda \\ -\frac{5}{17} + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Pas du torseur $[T_1]_A$: $P_1 = \dfrac{\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{1A}}{R_1^2} = \dfrac{1}{17}\left(-3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) \bullet \left(4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}\right) = -\dfrac{28}{17}$

2) Automoment du torseur $[T_1]_A$: $\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_{1A} = \left(-3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) \bullet \left(4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}\right) = -28$

L'automoment est indépendant du point A. En effet, d'après la formule de transport nous pouvons écrire : $\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1 \Rightarrow \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B + \vec{R}_1 \bullet \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_1 \right)$

$\vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_A = \vec{R}_1 \bullet \overrightarrow{M}_B$, on voit bien qu'il est indépendant du point A.

3) $[T]_A = a[T_1]_A + b[T_2]_A \Leftrightarrow [T]_A = \begin{cases} R = a\vec{R}_1 + b\vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M}_A = a\overrightarrow{M}_{1A} + b\overrightarrow{M}_{2A} \end{cases}$

$$[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = -3(a-b)\,\vec{i} + 2(a-b)\,\vec{j} + 2(a-b)\,\vec{k} \\ \overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} - (a-b)\,\vec{j} - 7(a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

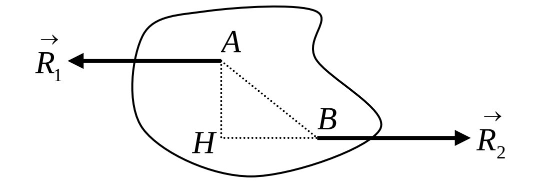
4) Condition pour que $[T]_A$ soit un torseur couple :

il faut que la résultante soit nulle : $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow a = b$

Le moment dans ce cas sera égal à : $\overrightarrow{M}_{1A} = 4(a+b)\,\vec{i} = 8a\,\vec{i}$

5) Le moment d'un torseur couple où les résultantes $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ ont le même module mais de sens opposées et appliquées aux points quelconque A et B s'écrit :

$$\overrightarrow{M}_A = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_2 = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{OB} \wedge (-\vec{R}_1)$$
$$= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_1 = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} \right) \wedge \vec{R}_1$$
$$= \overrightarrow{HA} \wedge \vec{R}_1 = -\overrightarrow{AH} \wedge \vec{R}_1 = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{R}_2$$



Le moment d'un couple est indépendant de la distance entre les points A et B , il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des résultantes. Cette distance est appelée bras de levier.

6) Système simple de vecteurs glissants associés au torseur somme : $[T_1]_A + [T_2]_A$

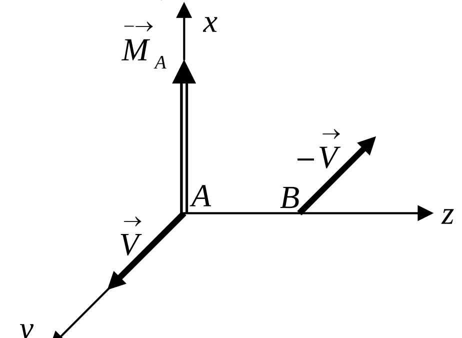
Le torseur somme $[T]_A$ est donné par : $[T]_A = \begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} = 8\,\vec{i} \end{cases}$

La résultante peut être décomposées en deux vecteurs quelconque de même module et de sens opposé dont l'un des vecteurs est placé au point A, on obtient alors :

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = \overrightarrow{AB} \wedge -\vec{V} = 5\,\vec{i}$$

système de deux vecteurs glissants : $\left(A,\ \vec{V}\right)$

et $\left(B,\ -\vec{V}\right)$, tel que : $\vec{V} \bullet \overrightarrow{M_A} = 0$



Exercice : 07

Soient deux torseurs $[T_1]_0$ et $[T_2]_0$ définis au même point O dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$[T_1]_0 = \begin{cases} \vec{R_1} = 2\sin\alpha\,\vec{i} + 2\cos\alpha\,\vec{j} \\ \overrightarrow{M_{10}} = a\cos\alpha\,\vec{i} - a\sin\alpha\,\vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad [T_2]_0 = \begin{cases} \vec{R_2} = 2\sin\alpha\,\vec{i} - 2\cos\alpha\,\vec{j} \\ \overrightarrow{M_{20}} = -a\cos\alpha\,\vec{i} - a\sin\alpha\,\vec{j} \end{cases}$$

1) Déterminer les pas des deux torseurs ;

2) Quelle est la nature des deux torseurs ;

3) Déterminer l'axe central du torseur $[T_2]_0$;

4) Déterminer l'invariant scalaire du torseur $[T_3]_0$ défini par : $[T_3]_0 = k_1[T_1]_0 + k_2[T_2]_0$ où k_1 et $k_2 \in IR$;

5) En déduire l'équation scalaire de la surface engendrée par l'axe central quand k_1 et k_2 varient ;

6) Calculer le produit des deux torseurs $[T_1]_0$ et $[T_2]_0$;

Exercice : 08

On considère deux points $A(0, 1, 0)$, $B(0, -1, 0)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{AM} = -m\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{k}$

$\overrightarrow{AP} = m\alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{k}$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Déterminer les équations de l'axe central du torseur défini par les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, et $\overrightarrow{AP}$;

2) Déduire l'équation de la surface balayée par cette axe lorsque α et β varient en gardant m constant.

Exercice : 09

Soit $[T]$ un torseur et A un point quelconque de l'espace.

Déterminer l'ensemble des points P tels que le moment $\overrightarrow{M}_P$ du torseur $[T]$ au point P soit parallèle au moment $\overrightarrow{M}_A$ du torseur $[T]$ au point A.

Exercice : 10

On applique à un solide de forme quelconque deux forces tel que : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = 200N\,\vec{u}$ aux points A et B du solide.

1) Quelle est la nature du torseur lié aux deux forces ;

2) Montrer que le moment de ce torseur est indépendant des point A et B.

CHAPITRE III

STATIQUE DES SOLIDES

STATIQUE

La statique est la partie de la mécanique qui étudie l'équilibre des systèmes matériels soumis à un ensemble de forces. Ces systèmes peuvent se réduire à un point matériel, un ensemble de points matériels, un solide ou à un ensemble de solides. Dans ce chapitre nous analyserons les actions mécaniques exercées sur ces systèmes à travers l'étude de l'équilibre de celui-ci.

Un système matériel est en équilibre statique par rapport à un repère donné, si au cours du temps, chaque point de l'ensemble garde une position fixe par rapport au repère.

1. Les systèmes de forces dans l'espace

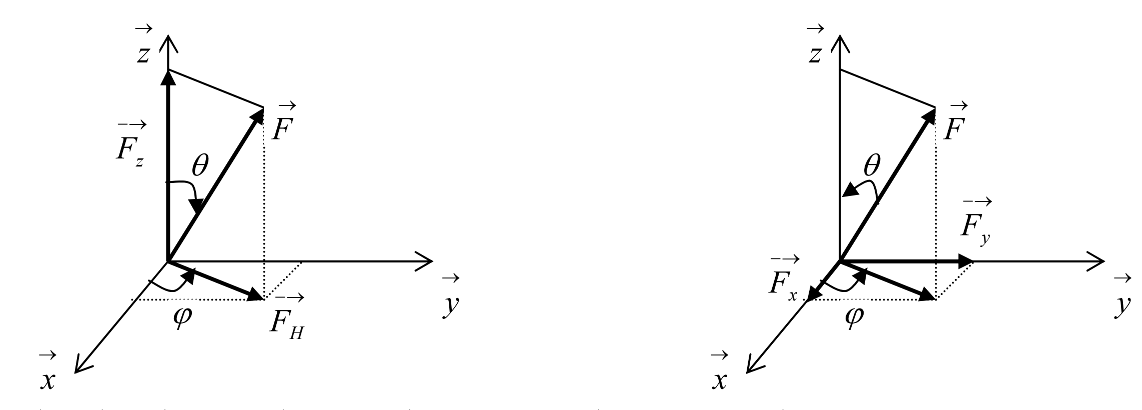
Les systèmes de forces sont classés en trois catégories :

Concourants : les lignes d'action de toutes les forces du système passent par un même point. C'est ce que l'on appelle forces concourantes en un point.

- **Parallèles :** les lignes d'actions des forces sont toutes parallèles, on dit aussi elles s'interceptent à l'infini
- **Non concourantes et non parallèles :** les forces ne sont pas toutes concourantes et pas toutes parallèles.

1.1. Composantes d'une force

Soit une force $\vec{F}$ appliquée à l'origine O d'un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les composantes de cette force sont définies par :



$$\vec{F} = \vec{F_H} + \vec{F_z} = \vec{F}\sin\theta + \vec{F}\cos\theta = \vec{F}\sin\theta\cos\varphi + \vec{F}\sin\theta\sin\varphi + \vec{F}\cos\theta$$

$$\vec{F} = F\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + F\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + F\cos\theta\,\vec{k}$$

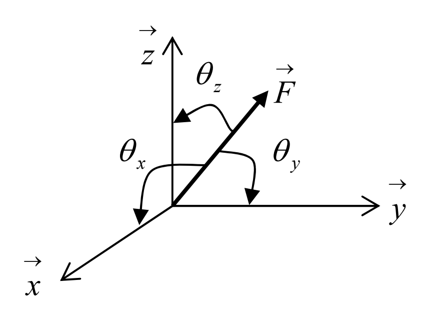
$$\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$$ nous avons aussi : $F^2 = F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} + F_z^{\ 2}$

1.2. Cosinus directeurs

Les projections de la force $\vec{F}$ sur les trois axes ox, oy, oz donnent respectivement les angles :

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ nous aurons alors :

$F_x = F\cos\theta_x \quad , \; F_y = F\cos\theta_y \;\; , \; F_z = F\cos\theta_z$



Si $\vec{i}\;,\;\vec{j}\;,\;\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère nous aurons : $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$

$\vec{F} = F(\cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}) = F\,\vec{\lambda}$ avec $\vec{\lambda} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}$

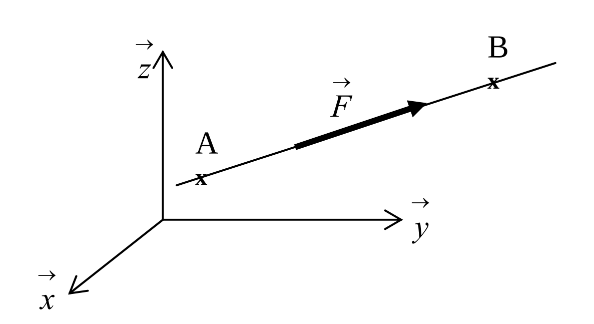
Le vecteur $\vec{\lambda}$ a la même direction que la force $\vec{F}$ et pour module 1. $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

2. Force définie par son module et deux points sur sa ligne d'action

Soient deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ appartenant à la droite (Δ) support de la force $\vec{F}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrira : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{AB} = d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = d$$



Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire le long de la ligne d'action de la force. Il est donné par :

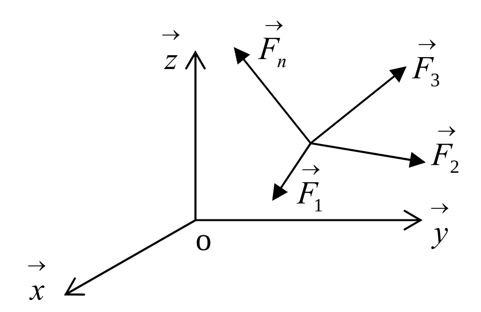
$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \dfrac{d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k}}{\sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}} = \dfrac{1}{d}(d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k})$ Comme la force est donnée par :

$\vec{F} = F\,\vec{u} = \dfrac{F}{d}(d_x\,\vec{i} + d_y\,\vec{j} + d_z\,\vec{k})$,

Composantes suivant les trois axes du repère : $F_x = F\dfrac{d_x}{d}$, $F_y = F\dfrac{d_y}{d}$, $F_z = F\dfrac{d_z}{d}$.

3. Equilibre d'un point matériel

On appelle, point matériel, une particule suffisamment petite pour pouvoir négliger ses dimensions et repérer sa position par ses coordonnées.



Un point matériel est en équilibre statique lorsque la somme de toutes les forces extérieures auxquelles il est soumis, est nulle.

Ces forces peuvent être coplanaire ou dans l'espace.

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\vec{F_4}+.............+\vec{F_1}=\vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}=\sum_i \vec{F_i}=\vec{0}$$

Une particule soumise à deux forces est en équilibre statique si les deux forces ont le même module, la même direction mais de sens opposé tel que leur résultante, soit nulle.

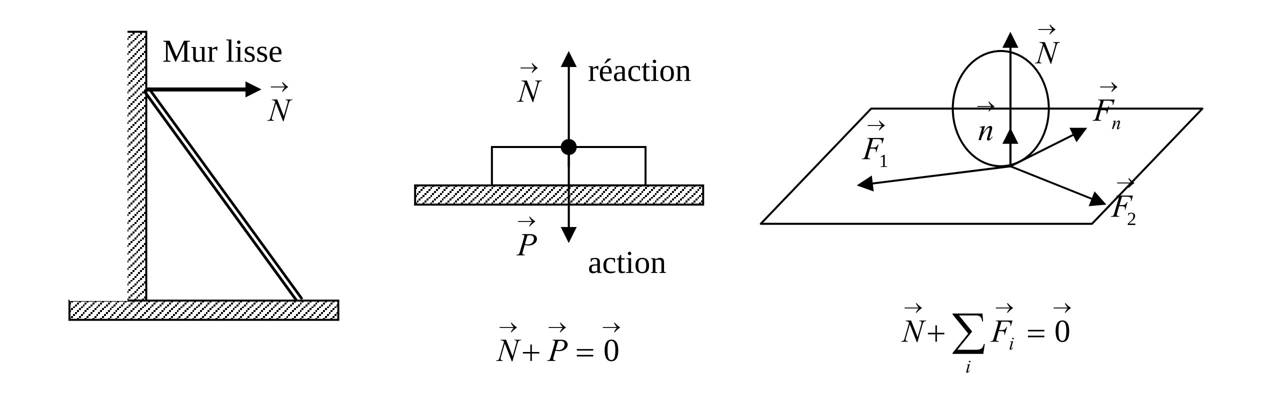
$$\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0} \quad ; \quad F_1-F_2=0 \Rightarrow F_1=F_2$$

$\vec{F_1}$ $\vec{F_2}$

4. Liaisons des solides

4.1. Liaisons sans frottements

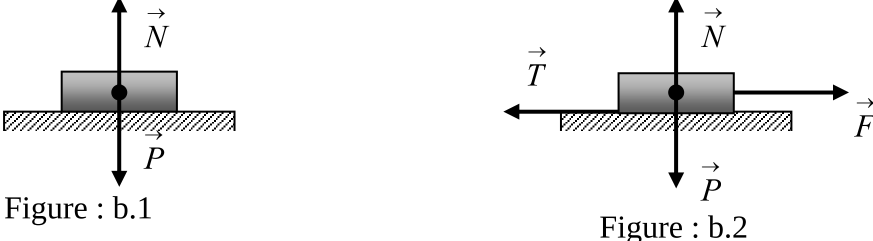
Dans le cas d'une liaison sans frottement entre un solide et un plan, la réaction est toujours normale au plan au point de contact quelques soit le nombre de forces extérieures appliquées au solide.



Dans le cas d'un contact ponctuel sans frottement, la condition d'équilibre est réalisée, si la somme de toutes les forces extérieures appliquées en ce point est égale à la réaction normale en ce même point. $\vec{N} + \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$

4.2. Liaisons entre solides avec frottements

On pose une pièce de bois en forme de parallélépipède sur un plan horizontal. Cette pièce de bois est en équilibre statique. La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids de la pièce.

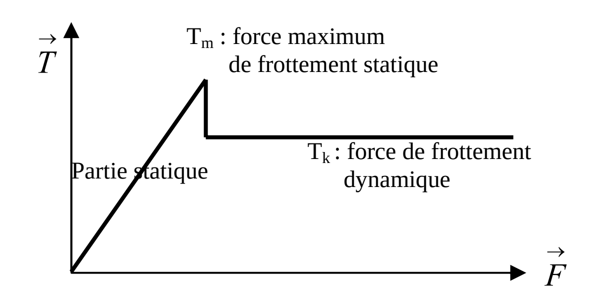


Appliquons graduellement en un point de cette pièce une force horizontale $\vec{F}$ (figure : b.1) La pièce ne bougera pas tant que cette force est inférieure à une certaine valeur limite, il existe alors une contre force $\vec{T}$ qui équilibre et s'oppose à cette force $\vec{F}$. $\vec{T}$ est appelée force de frottement statique.

Elle résulte d'un grand nombre de paramètres liés aux états de surfaces, à la nature des matériaux et aux forces de contact entre la pièce et la surface considérée.

Cette force de frottement statique obéit à la variation représentée sur la figure suivante.

Si μ_0 est le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact)* nous pouvons écrire :



- Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| \prec \mu_0 |\vec{N}|$
- A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu_0 |\vec{N}|$

Dans le cas d'une surface avec frottements (figure ci-dessous), la condition d'équilibre s'écrira : $\vec{N}+\vec{T}+\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$ (la somme des actions et des réactions, est nulle)

$$\mu_0 = \frac{\vec{T_m}}{\left|\vec{N}\right|} = tg\varphi$$

La force de frottement $\vec{T}$ est dirigée dans le sens contraire du mouvement et l'angle φ est appelé angle de frottement statique.

Si $\vec{F} \succ \left|\vec{T_m}\right|$ le solide se met en mouvement de glissement sur la surface.

$$\vec{T} = k \left|\vec{N}\right| \quad avec \;\; k < \mu_0 \quad et \quad tg\,\varphi = \frac{\left|\vec{T}\right|}{\left|\vec{N}\right|} = k$$

Ce coefficient **k** indépendant du temps est appelé coefficient de frottement dynamique, il est aussi indépendant de la vitesse.

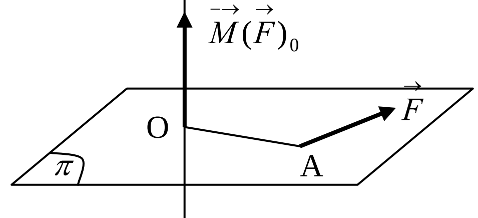
Ce tableau reprend quelques coefficients de frottement statiques et dynamiques des surfaces de matériaux en contact :

	Coefficient de frottement statique μ_0	Coefficient de frottement dynamique k
Acier / Acier	Mouillé 0.1 A sec 0.6	0.05 0.4
Bois / Bois	Mouillé 0.5	0.3
Métal / glace	0.03	0.01
Téflon / Acier	0.04	0.04
Cuivre / Acier	A Sec 0.5	0.4

5. Système de forces

5.1 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment $\overrightarrow{M(\vec{F})}_0$ par rapport à un point O, d'une force $\vec{F}$ appliquée au point A est égale au produit vectoriel : $\overrightarrow{M(\vec{F})}_0 = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$. Le trièdre formé par les vecteurs $(\overrightarrow{M(\vec{F})}_0, \overrightarrow{OA}, \vec{F})$ est direct.

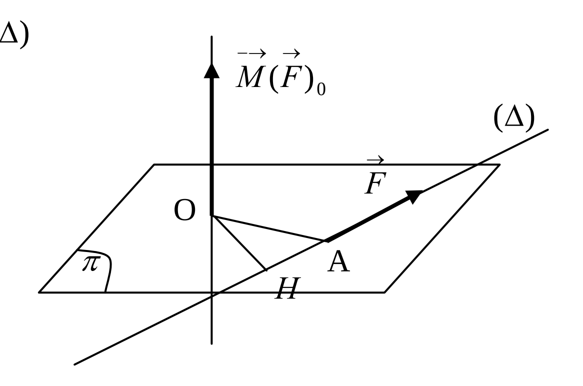


Remarque :
Le moment d'une force, glissant le long d'un axe (Δ), par rapport à un point O est indépendant du point A où elle s'applique.

$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{F}$ avec $\overrightarrow{OH} \perp (\Delta)$

$\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{HA} \wedge \vec{F}$ comme $\overrightarrow{HA} \;//\; \vec{F}$

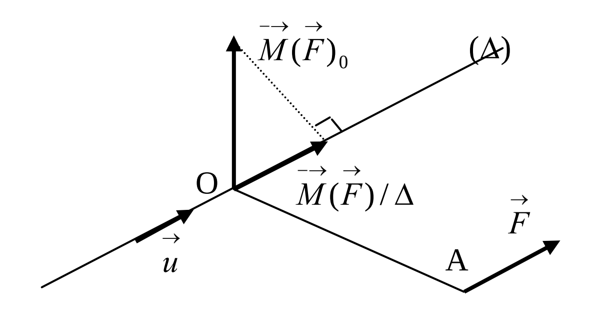
Alors $\overrightarrow{HA} \wedge \vec{F} = \vec{O}$ d'où $\overrightarrow{M}_O = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$



5.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit O un point sur l'axe (Δ) et $\vec{u}$ vecteur unitaire porté par cet axe.

On détermine le moment par rapport au point O, noté : $\overrightarrow{M(\vec{F})}/_O$, sa projection sur l'axe (Δ) est donnée par : $\overrightarrow{M(\vec{F})}/_\Delta = \left(\overrightarrow{M(\vec{F})}/_O \bullet \vec{u}\right)\vec{u}$



5.3 Théorème de VARIGNON

Le moment d'un système de forces concourantes en un point A par rapport à un point O est égal au moment de la résultante des forces par rapport au point O.

Dans les deux cas de figure nous montrerons que le moment résultant est égal au moment de la résultante des forces du système.

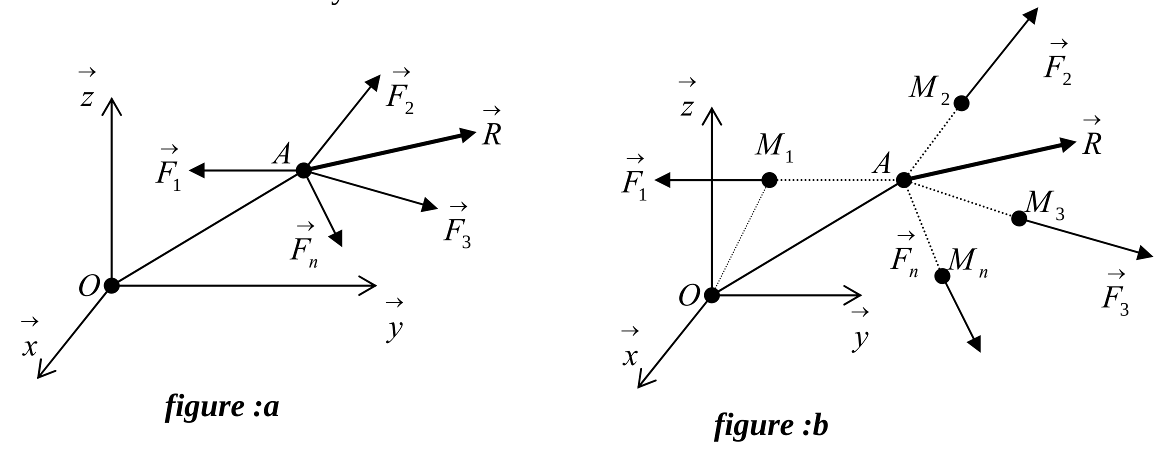


figure :a *figure :b*

Figure a : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(A)$ et le moment au point O est donné par :

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = \sum_i \overrightarrow{M}_i(\vec{F}_i) = (\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_2 + \dots\dots\dots\dots + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_n$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = (\overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\dots\dots\dots + \vec{F}_n)$$

$$\overrightarrow{M}(\vec{R})_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}$$

Figure b : Nous avons $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i(M_i)$

$$\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_1 \;,\; \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_2 \;,\; \dots\dots\dots\; \overrightarrow{OM}_n = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 + \dots\dots\dots\dots + \overrightarrow{OM}_n \wedge \vec{F}_n$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_1) \wedge \vec{F}_1 + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_2) \wedge \vec{F}_2 + \dots\dots\dots\dots + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}_n) \wedge \vec{F}_n$$

Or $\overrightarrow{AM}_i // \vec{F}_i$ =====> $\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$; on obtient finalement :

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_i)_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots\dots\dots\dots + \vec{F}_n) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R} = \vec{M}(\vec{R})_{/O}$$

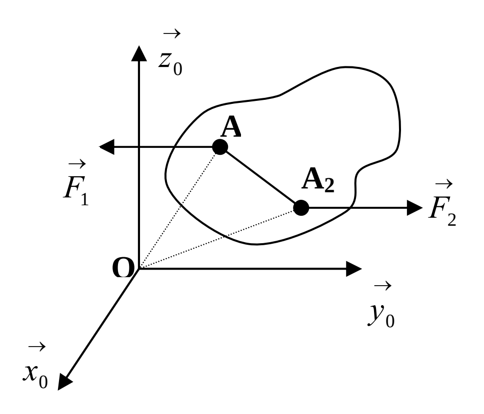
5.4. Moment d'un couple de forces

Un couple de force est défini par deux forces de même module, de sens opposée et portées par deux droites parallèles tel que : $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$; $F_1 = F_2$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \vec{M}_1(\vec{F}_1)_{/O} + \vec{M}_2(\vec{F}_2)_{/O}$$

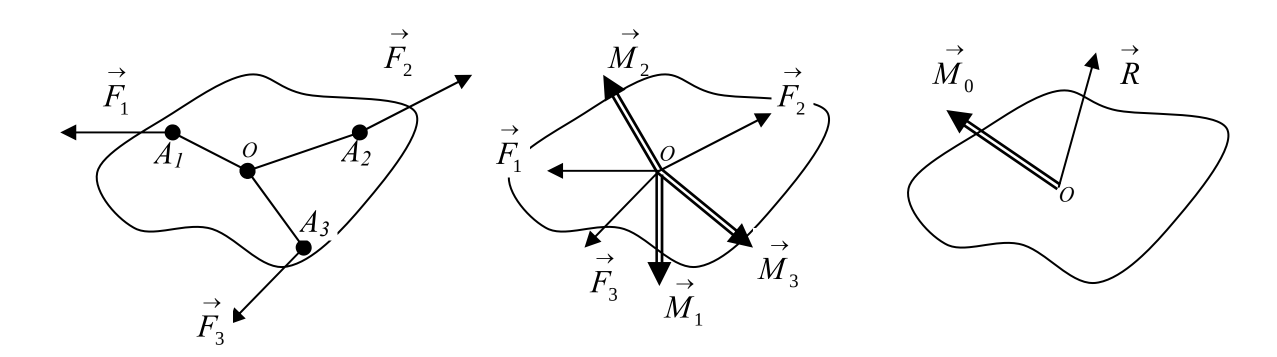
$$= \overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_2 = (-\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) \wedge \vec{F}_2$$

$$\sum_i \vec{M}_i(F_i)_{/O} = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \vec{F}_2$$



La somme des forces, est nulle mais le moment n'est pas nul. Un couple de force produit uniquement un mouvement de rotation. Le moment d'un couple est indépendant du point où on le mesure, il dépend uniquement de la distance qui sépare les deux droites supports des deux forces.

- Un couple ne peut jamais être remplacé par une force unique ;
- Un système force couple tel que $\vec{M} \perp \vec{F}$ peut toujours se réduire en une résultante unique. On choisit la résultante des forces au point O où s'applique le moment de telle sorte que son propre moment soit nul et le moment en ce point serait égal à la somme des moments de toutes les forces du système.



6. Statique du solide

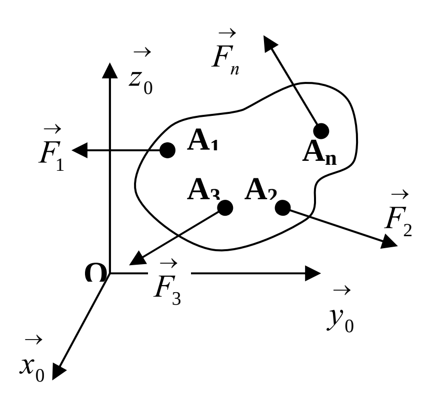
Tous les solides que nous étudierons dans ce chapitre sont considérés indéformables : la distance entre deux points du même solide reste constante quels que soit les systèmes de forces extérieures appliqués.

On considère un solide *(S)* quelconque soumis à des forces : $(\vec{F}_1, \vec{F}_2\, \vec{F}_3 ...., \vec{F}_n)$ appliquées aux points : $(M_1, M_2, M_3, ...M_n)$

6.1. Equilibre du solide

Pour que le solide soit en équilibre statique il faut et il suffit que :

- *La résultante de toutes les forces extérieures appliquées au solide, soit nulle ;*
- *Le moment résultant de toutes ces forces en un point O, soit nul.*



- $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$
- $\overrightarrow{M}_{/O} = \sum_i \overrightarrow{M(\vec{F}_i)}_{/O} = \vec{0}$

Un solide *(S)*, soumis à des actions mécaniques extérieures est en équilibre statique si et seulement si le torseur représentant l'ensemble de ces actions est un torseur nul.

Ces deux équations vectorielles se traduisent par les six équations scalaires suivantes :

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{M}_{/O} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

Le système est complètement déterminé si le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations indépendantes.

6.2.Equilibre d'un solide dans un plan

Dans le cas d'un solide soumis à des forces coplanaires, le système précédent se réduit à trois équations scalaires.

Soit *(xoy)* , le plan contenant les forces appliquées au solide, nous avons alors :

$z = 0$ et $F_z = 0 \Leftrightarrow M_x = M_y = 0$ et $M_z = M_{/O}$

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0 \quad ; \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0 \quad ; \quad M_{/O} = \sum_i M_{iz} = 0$$

$$\vec{F}_i = \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} \; ; \quad \overrightarrow{OA}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M}_{i/O} = \overrightarrow{OA}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{cases} x_i \\ y_i \\ 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = M_{iz} \end{cases}$$

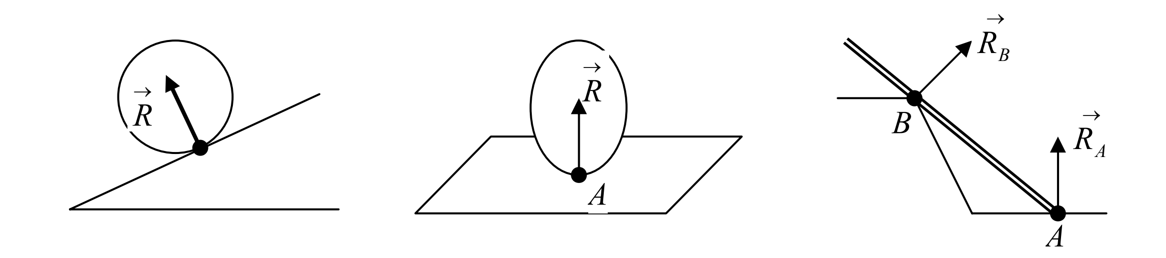
$$M_{/O} = \sum_i M_{i/O} = 0$$

6.3. Réactions aux appuis et aux liaisons à deux dimensions

6.3.1. Appui simple d'un solide sur une surface parfaitement lisse

Les contacts entre les solides sont ponctuels.

Soit *(S)* un solide reposant sur une surface *(P)* , on dit que le point *A* du solide est un point d'appui s'il reste continuellement en contact de la surface *(P)*. Si le plan *(P)* est parfaitement lisse alors la force de liaison (la réaction $\vec{R}$) au point de contact est normale à ce plan.

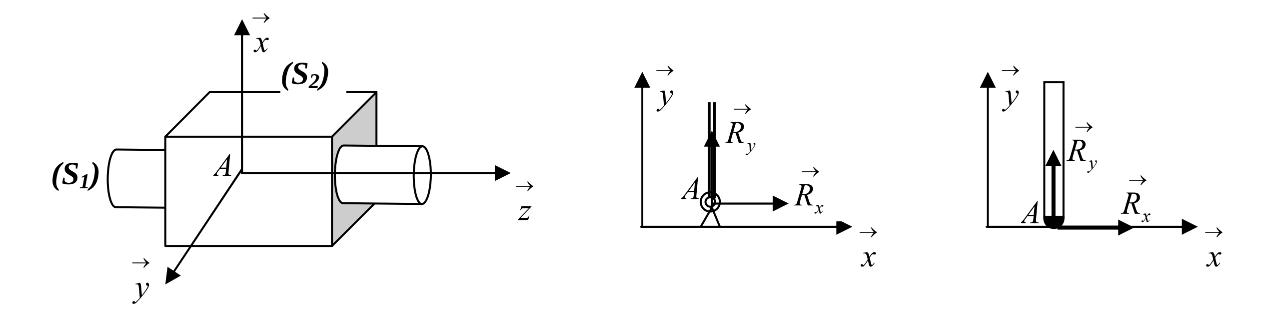


6.3.2. Articulation d'un solide

Un point A d'un solide est une articulation lorsqu'il reste en permanence en un point fixe de l'espace.

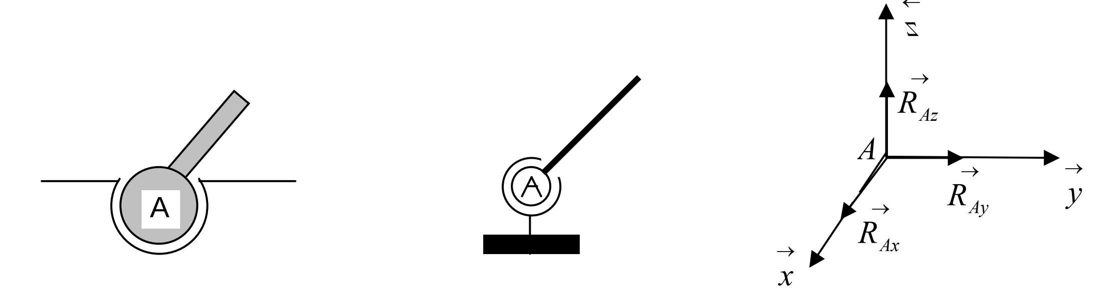
a) Liaison verrou (Articulation cylindrique)

Les solides sont en contact entre eux suivant une surface cylindrique. Le solide (S_1) a deux degrés de liberté par rapport au solide (S_2) : Une translation suivant l'axe Az, et une rotation autour du même axe.



$\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay}$ avec $\vec{R}_{Az} = \vec{0}$ **La réaction suivant l'axe de l'articulation *(Az)* est nulle.**

b) Liaison rotule (Articulation sphérique)



Liaison sphérique : 3 degrés de liberté (rotations)

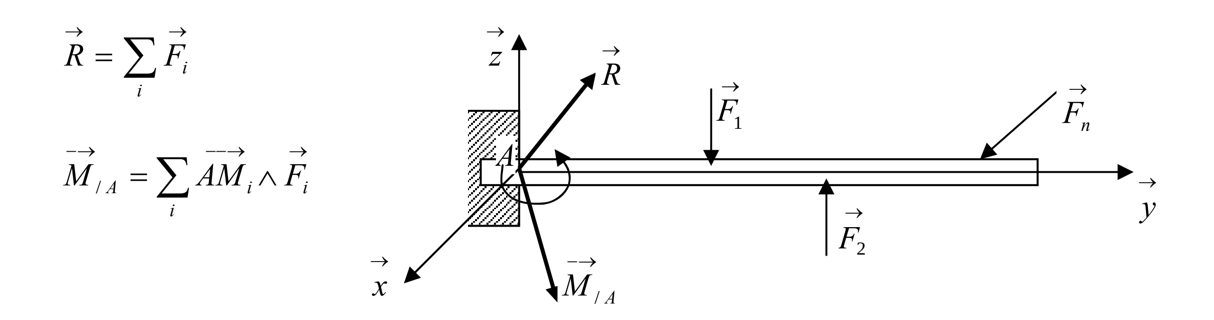
La réaction au point A de l'articulation sphérique a trois composantes : $\vec{R}_A = \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Ay} + \vec{R}_{Az}$

c) Encastrement d'un solide

On dit qu'un solide est encastré lorsqu'il ne peut plus changer de position quels que soit les forces extérieures appliquées. Cette liaison est représentée par deux grandeurs :

$\vec{R}$: la résultante des forces extérieures appliquées au solide et actives au point A

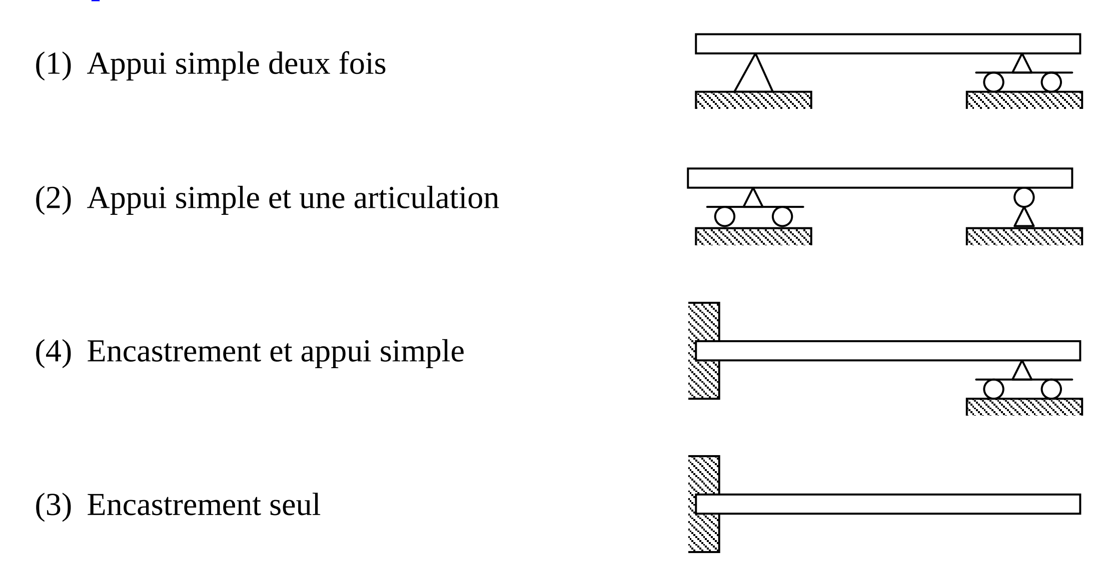
$\vec{M}_{/A}$: le moment résultant des forces extérieures appliquées au solide par rapport au point A



d) Combinaisons de liaisons

Avec ces différents types de liaisons *(Appui simple, articulation cylindrique, articulation sphérique et encastrement)* nous pouvons réaliser des comobinaisons qui permettent de réaliser montages mécaniques statiquement déterminés.

Exemples:



(1) Appui simple deux fois

(2) Appui simple et une articulation

(4) Encastrement et appui simple

(3) Encastrement seul

Ces combinaisons sont dites isostatiques (statiquement déterminées) si le nombre d'inconnues est inférieures au nombre d'équations indépendantes qu'on peut établir. Certaines combinaisons ne sont pas autorisées et ne peuvent trouver la solution par la statique seule.

Exemples : *2 appuis articulés, une articulation et un encastrement, encastrement deux fois.*

Certaines combinaisons sont hyperstatiques, elles ne peuvent trouver solution par la statique.

Exemple : appui simple trois fois

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe *Oz*	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

EXERCICES SOLUTIONS

Exercice 01 :

Déterminer les tensions des câbles dans les figures suivantes :

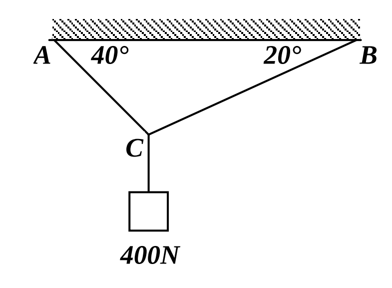


figure: 1

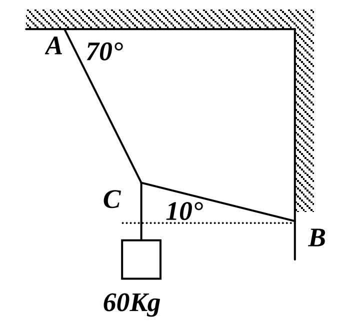


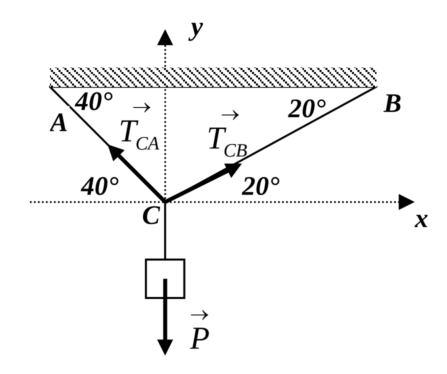
figure : 2

Solution :

Figure 1 :

Au point ***C*** nous avons :

$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = \vec{0}$



La projection sur les axes donne :

$-T_{CA}\cos 40° + T_{CB}\cos 20° = 0$

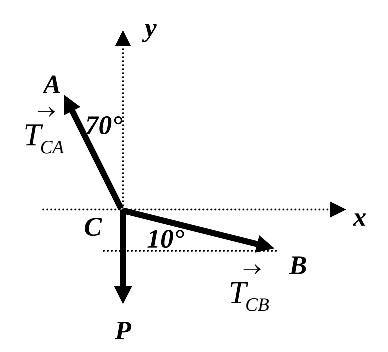
$T_{CA}\sin 40° + T_{CB}\sin 20° - P = 0$

d'où : $T_{CA} = 354\ N$. $T_{CB} = 288{,}5\ N$

Figure 2 :

Au point ***C*** nous avons :

$\vec{T}_{CA} + \vec{T}_{CB} + \vec{P} = \vec{0}$



La projection sur les axes donne :

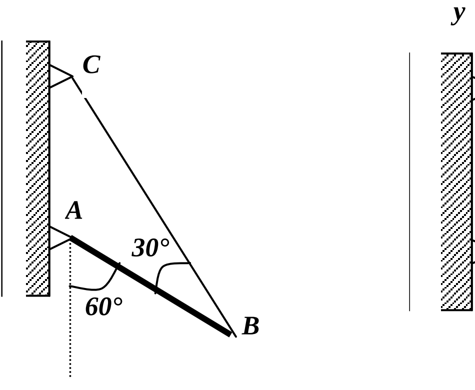
$-T_{CA}\sin 70° + T_{CB}\cos 10° = 0$

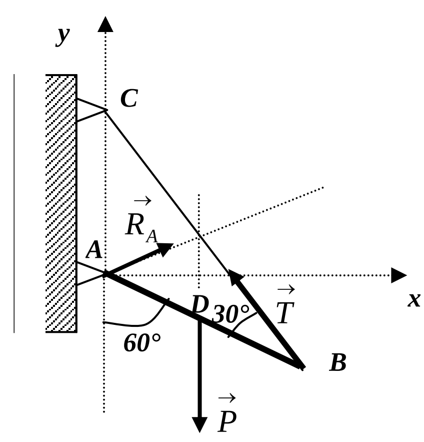
$T_{CA}\cos 70° - T_{CB}\sin 10° - P = 0$

d'où : $T_{CA} = 3390\ N$; $T_{CB} = 3234\ N$

Exercice 02 :

Une barre homogène pesant ***80 N*** est liée par une articulation cylindrique en son extrémité ***A*** à un mur. Elle est retenue sous un angle de ***60°*** avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité ***B***. Le câble fait un angle de ***30°*** avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point ***A***.





Solution :

Le système est en équilibre statique dans le plan *(xoy)*, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{cases} L\cos 30° \\ L\sin 30° \end{cases} \; ; \quad \overrightarrow{AD}\begin{cases} (L/2)\cos 30° \\ (L/2)\sin 30° \end{cases} \; ; \quad \vec{P}\begin{cases} 0 \\ -P \end{cases} \; ; \quad \vec{T}\begin{cases} -T\cos 60° \\ T\sin 60° \end{cases}$$

L'équation ***(1)*** projetée sur les axes donne : $R_{Ax} - T\cos 60° = 0$ ***(3)***

$$R_{Ay} + T\sin 60° - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

L'équation ***(2)*** s'écrira : $\begin{pmatrix} L\cos 30° \\ L\sin 30° \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T\cos 60° \\ T\sin 60° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2)\cos 30° \\ (L/2)\sin 30° \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$LT\cos 30° s\sin 60° + LT\cos 60°\sin 30° - \frac{PL}{2}\cos 30° = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

(5) $\Rightarrow$ $T = \dfrac{P}{2}\cos 30° = 34{,}64N$

(3) $\Rightarrow$ $R_{AX} = T\cos 60° = 17{,}32N$

(4) $\Rightarrow$ $R_{Ay} = P - T\sin 60° = 30N$

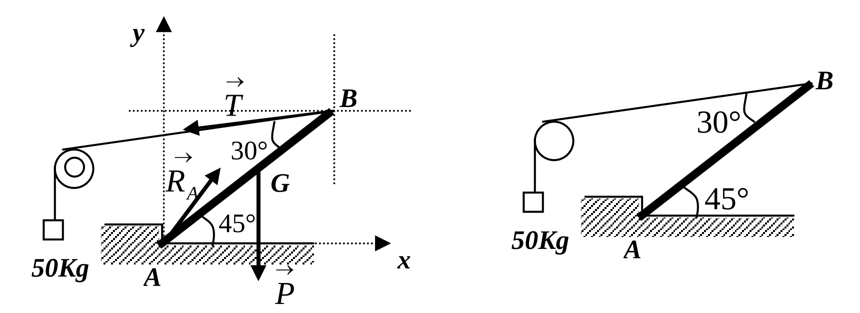
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{AY}^2} = 34.64N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe ***ox*** est donné par :

$\cos\theta = \dfrac{R_{Ax}}{R_A} = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 60°$

Exercice 03 :

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge ***P*** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de ***8m*** et une masse de ***50 Kg*** et fait un angle de ***45°*** avec l'horizontale et ***30°*** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en ***A*** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont dans le plan *(xoy)* . Le système est en équilibre statique d'où

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{AB}\wedge\vec{T} + \vec{AG}\wedge\vec{P} = \vec{0} \qquad (2)$$

Nous avons $T = P$, et $\overrightarrow{AB}\begin{cases}4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{cases}$; $\overrightarrow{AG}\begin{cases}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{cases}$; $\vec{P}\begin{cases}0\\-P\end{cases}$; $\vec{T}\begin{cases}-T\cos 15°\\-T\sin 15°\end{cases}$; $\vec{R}_A\begin{cases}R_{Ax}\\R_{Ay}\end{cases}$

L'équation ***(1)*** projetée sur les axes donne : $R_{Ax} - T\cos 15° = 0$ ***(3)***

$R_{Ay} - T\sin 15° - P = 0$ ***(4)***

L'équation ***(2)*** s'écrira : $\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-T\cos 15°\\-T\sin 15°\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$-4T\sqrt{2}\sin 15° + 4T\sqrt{2}\cos 15° - 2P\sqrt{2} = 0 \qquad \textit{(5)}$$

$$T = \frac{2P\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(\cos 15° - \sin 15°)} \Rightarrow T = 353{,}55N$$

(3) $\Rightarrow$ $R_{Ax} = 341{,}50N$ et ***(4)*** $\Rightarrow$ $R_{Ay} = 591{,}50N$

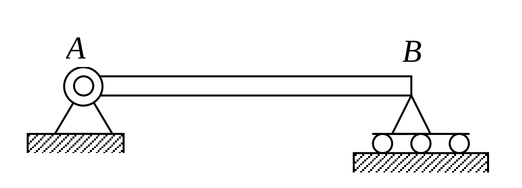
d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{AY}^2} = 683N$ et l'angle que fait la réaction avec l'axe ***ox*** est donné par :

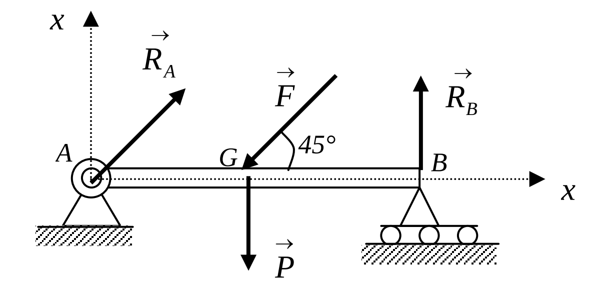
$$\cos\theta = \frac{R_{Ax}}{R_A} = 0{,}577 \Rightarrow \theta = 54{,}76°$$

Exercice 04 :

La barre ***AB=L*** est liée en ***A*** par une articulation cylindrique et à son extrémité ***B***, elle repose sur un appui rouleau. Une force de ***200 N*** agit en son milieu sous un angle de ***45°*** dans le plan vertical. La barre a un poids de ***50 N***.

Déterminer les réactions aux extrémités ***A*** et ***B***.





Solution :

Toutes les forces agissant sur la poutre sont situées dans le plan *(xoy)* . Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne :

$$R_{Ax} - F\cos 45° = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} + R_B - F\sin 45° - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

En développant l'équation ***(2)*** on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F\cos 45° \\ -F\sin 45° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = 0$$

$$LR_B - \frac{L}{2}F\cos 45° - \frac{L}{2}P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_B - \frac{F\sqrt{2}}{4} - \frac{P}{2} = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

(5) $\Rightarrow \quad R_B = 95{,}71 \ N$

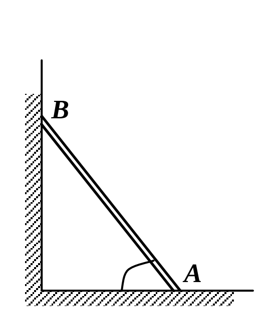
(3) $\Rightarrow \quad R_{Ax} = 141{,}42 \ N$

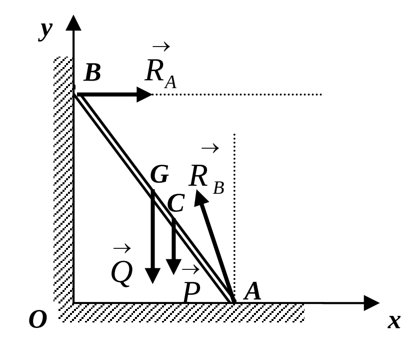
(4) $\Rightarrow \quad R_{Ay} = 95{,}71 \ N$; d'où $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 170{,}76 N$

Exercice 05 :

Une échelle de longueur ***20 m*** pesant ***400 N*** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à ***16 m*** du sol. Son centre de gravité est situé à ***1/3*** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant ***700 N*** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.





Solution :

AB=L =20 m , OB=16 m, Q =700 N , P =400 N, $\sin\alpha = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \alpha = 53{,}13°$

L'échelle est en équilibre statique. La résultante des forces est nulle. Le moment résultant par rapport au point A est aussi nul.

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{R_A} + \vec{R_B} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R_B} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Nous avons aussi :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -(L/2)\cos\alpha \\ (L/2)\sin\alpha \end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -(L/3)\cos\alpha \\ (L/3)\sin\alpha \end{pmatrix}\ ;\ \vec{R_B}\begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ \vec{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix}\ ;\ \vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne les équations scalaires :

$$-R_{Ax} + R_B = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} - Q - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

En développant l'équation (2), on aboutit à :

$$\begin{pmatrix} -L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/2)\cos\alpha \\ (L/2)\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(L/3)\cos\alpha \\ (L/3)\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-R_B L\sin\alpha + Q\frac{L}{2}\cos\alpha + P\frac{L}{3}\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

(5) $\Rightarrow \quad R_B = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\dfrac{Q}{2} + \dfrac{P}{3}\right)$ d'où $R_B = 362{,}5N$

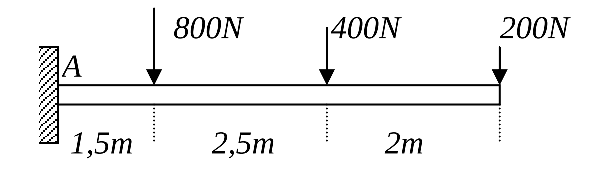
(3) $\Rightarrow \quad R_{Ax} = R_B = 362{,}5N$

(4) $\Rightarrow \quad R_{Ay} = 1100N$; on déduit : $R_A = 1158{,}34N$

Exercice 06 :

On applique trois forces sur une poutre de masse négligeable et encastrée au point *A*.

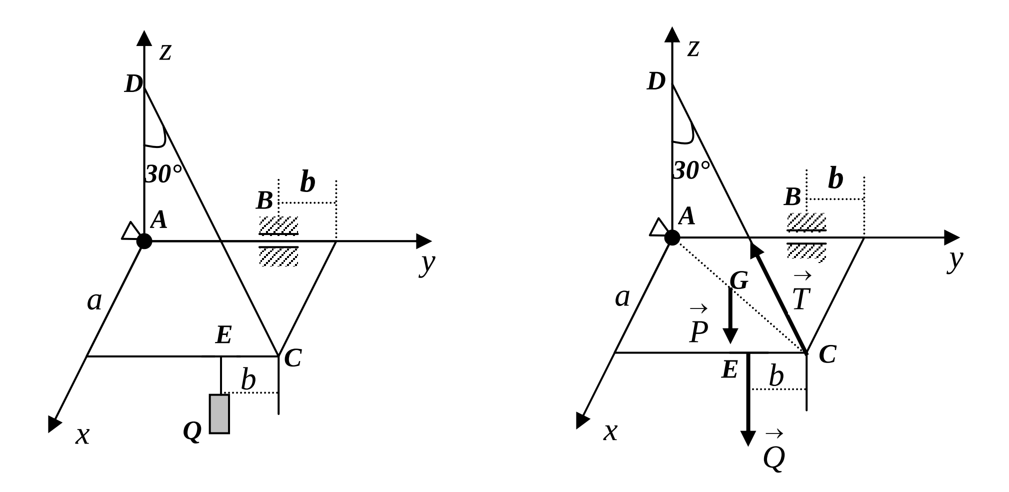
Déterminer la réaction à l'encastrement.



Exercice 07 :

Un plaque carrée de coté **a**, de poids **P** est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point **A** et d'une articulation cylindrique au point **B**. Un câble **CD** inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge **Q = 2P** est suspendue au point **E** de la plaque. Les données sont : $b = \frac{a}{3}$; $\alpha = 30°$

Déterminer les réactions des articulations en **A** et **B** ainsi que la tension dans le câble en fonction de **a** et **P**



Solution :

La plaque est en équilibre statique dans le plan horizontale, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AE} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad (2)$$

Articulation sphérique en **A** : R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}

Articulation cylindrique en **B** et d'axe **y**: $R_{Bx}, 0, R_{Bz}$

Le triangle **ACD** est rectangle en **A** , et l'angle ***(DA,DC) = 30°*** alors l'angle ***(CA,CD)=60°***

La tension aura pour composantes : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T\cos 60 \cos 45 \\ -T\cos 60 \sin 45 \\ T\sin 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(T\sqrt{2})/4 \\ -(T\sqrt{2})/4 \\ (T\sqrt{3})/2 \end{pmatrix}$

$\vec{Q}\begin{pmatrix}0\\0\\-2P\end{pmatrix}$; $\vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2a/3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a\\2a/3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}a/2\\a/2\\0\end{pmatrix}$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes du repère :

$$R_{Ax} + R_{Bx} - (T\sqrt{2})/4 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} - (T\sqrt{2})/4 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} - (T\sqrt{3})/2 - 2P - P = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

L'équation ***(2)*** se traduira par :

$$\begin{pmatrix}0\\2a/3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-(T\sqrt{2})/4\\-(T\sqrt{2})/4\\(T\sqrt{3})/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\2a/3\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-2P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a/2\\a/2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Le développement de ce produit vectoriel donnera trois équations :

$$\frac{2a}{3}R_{Bz} + aT\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4aP}{3} - \frac{aP}{2} = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$-aT\frac{\sqrt{3}}{2} + 2aP + \frac{aP}{2} = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-\frac{2a}{3}R_{Bx} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

La résolution de ce système d'équations donne :

(8) $\Rightarrow R_{Bx} = 0$; ***(7)*** $\Rightarrow T = \frac{5\sqrt{3}}{3}P$; ***(6)*** $\Rightarrow R_{Bz} = -P$

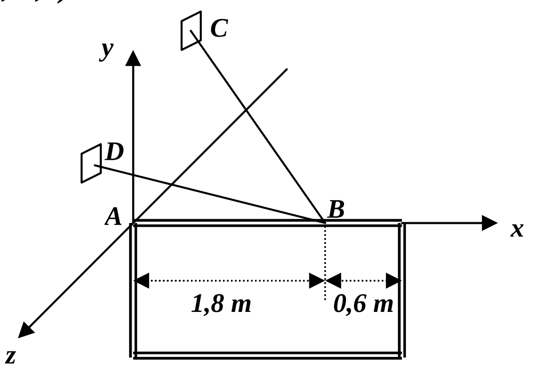
(5) $\Rightarrow R_{Az} = \frac{3}{2}P$; ***(4)*** $\Rightarrow R_{Ay} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P$; ***(3)*** $\Rightarrow R_{Ax} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P$

$R_A = 17{,}39P$ et $R_B = P$

Exercice 08 :

Une enseigne lumineuse rectangulaire de densité uniforme de dimension ***1,5*** x ***2,4 m*** pèse ***120 Kg.*** Elle est liée au mûr par une articulation sphérique et deux câbles qui la maintienne en position d'équilibre statique, comme indiqué sur la figure. Déterminer les tensions dans chaque câble et la réaction au point ***A.***

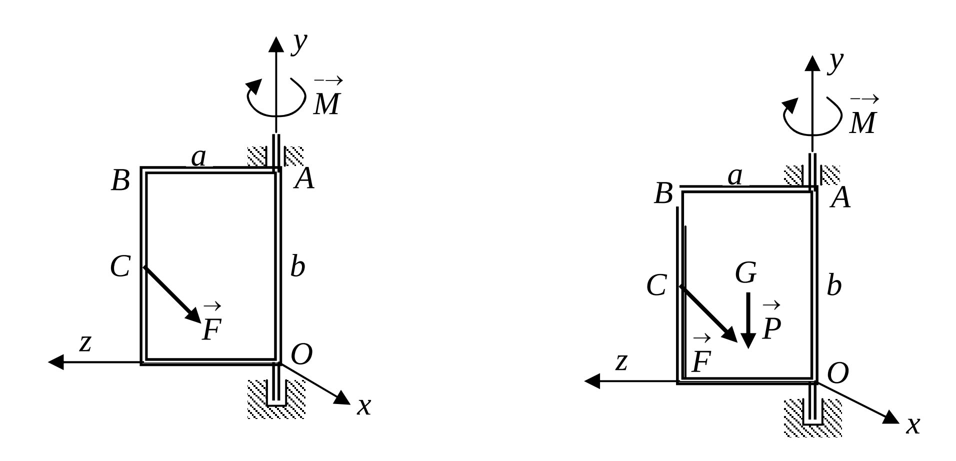
On donne : ***C(0 ; 1,2 ; --2,4) , D(0 ; 0,9 ; 0,6).***



Exercice 09 :

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions ***a*** x ***b,*** de poids ***P*** , est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point ***O*** et l'autre cylindrique au point ***A*** . Une force ***F*** est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point ***C*** milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment $\overrightarrow{M}$ au point ***A***. Déterminer les réactions aux niveau des articulation ***O*** et ***A*** ainsi que la force ***F*** nécessaire pour ouvrir la porte. On donne : ***a = 2m, b = 3m, BC= b/2,***

M = 400N, P = 800N



Solution :

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix}$

Et aussi : $\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{R}_O = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$; $\vec{R}_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{pmatrix}$

La porte est en équilibre statique, nous pouvons écrire :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_O + \vec{R}_A + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/O} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes du repère :

$R_{Ox} + R_{Ax} + F = 0$ ***(3)***

$R_{Oy} - P = 0$ ***(4)***

$R_{Oz} + R_{Az} = 0$ ***(5)***

L'équation ***(2)*** se traduira par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b/2 \\ a/2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$bR_{Az} + \dfrac{aP}{2} = 0$ ***(6)***

$aF - M = 0$ ***(7)***

$-bR_{Ax} - \dfrac{bF}{2} = 0$ ***(8)***

la résolution de ce système d'équation nous donne :

(4) $\Rightarrow$ $R_{Oy} = P = 800N$; ***(6)*** $\Rightarrow$ $R_{Az} = \dfrac{-aP}{2b} = -266{,}66N$

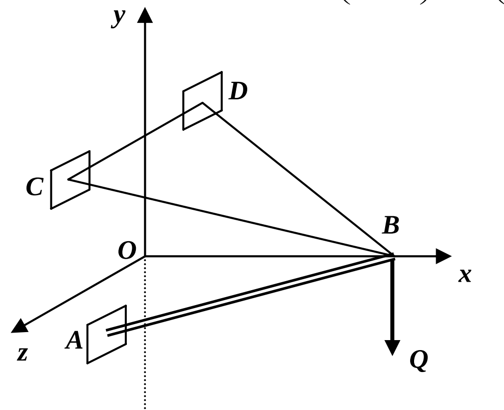
(7) $\Rightarrow$ $F = \dfrac{M}{a} = 200N$; ***(8)*** $\Rightarrow$ $R_{Ax} = \dfrac{-F}{2} = -100N$

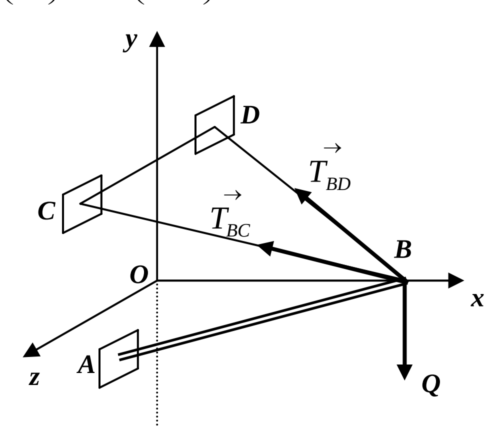
(5) $\Rightarrow$ $R_{Oz} = -R_{Az} = 266{,}66N$; ***(3)*** $\Rightarrow$ $R_{Ox} = -R_{Ax} - F = -100N$

on déduit : $R_O = 849N$; $R_A = 284{,}8N$

Exercice 10 :

Une barre **AB** de masse négligeable supporte à son extrémité **B** une charge de ***900 N***, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Elle est maintenue en **A** par une articulation sphérique et en **B** par deux câbles attachés aux points **C** et **D**. Déterminer la réaction au point **A** et la tension dans chaque câble. Données : $A\begin{pmatrix}0\\-1,5\\1\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\3\\1,5\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\3\\-1,5\end{pmatrix}$





Solution :

Le système est en équilibre statique. La résultante des fores est nulle et le moment résultant de toutes les forces par rapport au point A est nul. Nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{T}_{BC} + \vec{T}_{BD} + \vec{Q} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Noua avons une articulation sphérique en **A** : R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az}

Déterminons les composantes des tensions dans les câbles **BC** et **BD** :

Les vecteurs unitaires suivant les axes **BC** et **BD** sont donnés par :

$$\vec{u}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{-3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 1,5\,\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1,5)^2}} = -0,66\,\vec{i} + 0,66\,\vec{j} + 0,33\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - 1,5\,\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (1,5)^2}} = -0,66\,\vec{i} + 0,66\,\vec{j} - 0,33\,\vec{k}$$

Les tensions dans les deux câbles s'écriront sous la forme :

$$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\,\vec{u}_{BC} = -0{,}66T_{BC}\,\vec{i} + 0{,}66T_{BC}\,\vec{j} + 0{,}33T_{BC}\,\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\,\vec{u}_{BD} = -0{,}66T_{BD}\,\vec{i} + 0{,}66T_{BD}\,\vec{j} - 0{,}33T_{BD}\,\vec{k}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne les trois équations scalaires :

$$R_{Ax} - 0{,}66T_{BC} - 0{,}66T_{BD} = 0 \qquad \textit{(3)}$$

$$R_{Ay} + 0{,}66T_{BC} + 0{,}66T_{BD} - Q = 0 \qquad \textit{(4)}$$

$$R_{Az} + 0{,}33T_{BC} - 0{,}33T_{BD} = 0 \qquad \textit{(5)}$$

L'équation ***(2)*** s'écrira :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}66T_{BC} \\ 0{,}66T_{BC} \\ 0{,}33T_{BC} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}66T_{BD} \\ 0{,}66T_{BD} \\ -0{,}33T_{BD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En développant ce produit vectoriel, nous obtenons les trois équations suivantes :

$$-Q + (1{,}5\times 0{,}33)T_{BC} + 0{,}66T_{BC} - (1{,}5\times 0{,}33)T_{BD} + 0{,}66T_{BD} = 0 \qquad \textit{(6)}$$

$$(-3\times 0{,}33)T_{BC} + 0{,}66T_{BC} + (3\times 0{,}33)T_{BD} + 0{,}66T_{BD} = 0 \qquad \textit{(7)}$$

$$-3Q + (3\times 0{,}66)T_{BC} + (1{,}5\times 0{,}66)T_{BC} + (3\times 0{,}66)T_{BD} + (1{,}5\times 0{,}66)T_{BD} = 0 \qquad \textit{(8)}$$

A partir de l'équation ***(7)*** on déduit que : $T_{BC} = 5T_{BD}$

En remplaçant dans l'équation ***(6)*** on obtient : $T_{BD} = \dfrac{Q}{5{,}61} = 160{,}43N$

D'où : $T_{BC} = 802{,}15N$

(3) $R_{Ax} = 0{,}66(T_{BC} + T_{BD}) = 635{,}30N$

(4) $R_{Ay} = Q - 0{,}66(T_{BC} + T_{BD}) = 264{,}70N$

(5) $R_{Az} = 0{,}33(T_{BD} - T_{BD}) = -156{,}70N$

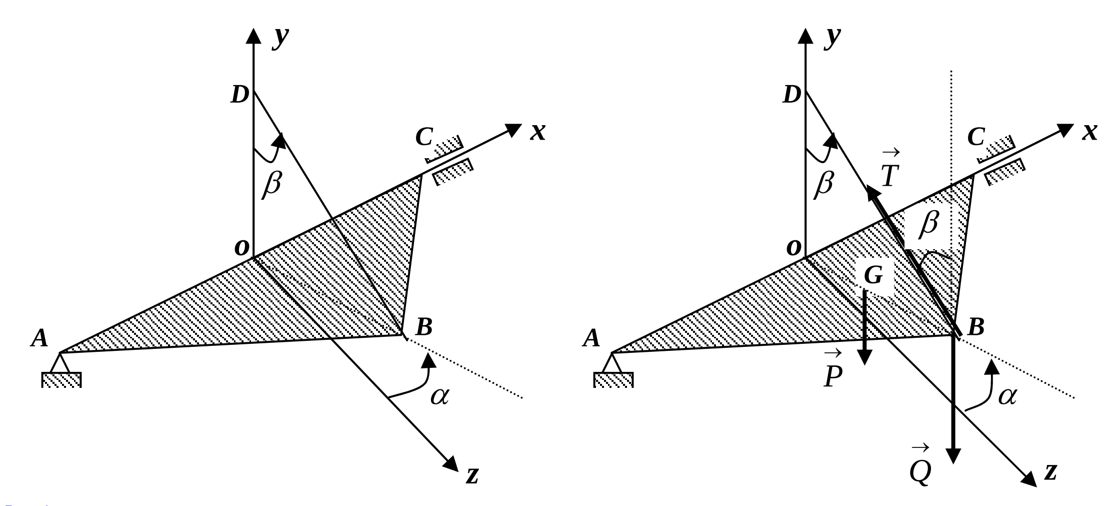
$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 705{,}85N$$

Exercice 11 :

Une plaque triangulaire homogène ***ABC*** de poids ***P*** est lié à un support fixe par l'intermédiaire d'une articulation sphérique au point ***A*** et cylindrique au point ***C***. On donne ***OA=OC=OB = a***. La plaque est maintenue en position inclinée d'un angle de $\alpha = 30°$ par rapport au plan horizontal ***(xoz)*** par un câble inextensible ***BD***, accroché au point ***D*** à un mur vertical. La corde fait un angle de $\beta = 60°$ avec la verticale. Une charge de poids ***Q = 2P*** est suspendue au point $B \in (yoz)$.

Le centre de gravité ***G*** de la plaque est situé ***1/3*** de ***OB*** à partir de ***O***.

1. Ecrire les équations d'équilibre statique ;
2. Déterminer les réactions des liaisons aux points ***A*** et ***C*** ainsi que la tension du câble.



Solution :

Nous avons $OA = OB = OC = a$; $OG = \dfrac{a}{3}$; $Q = 2P$; $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$

Le point $B \in (yoz)$; $\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$; $\vec{R}_C \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix}$; $\vec{T} \begin{pmatrix} 0 \\ T\cos\beta \\ -T\sin\beta \end{pmatrix}$; $\vec{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ -2P \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A \begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; C \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; B \begin{cases} 0 \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{cases} ; \; G \begin{cases} 0 \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \begin{cases} 2a \\ 0 \\ 0 \end{cases} ; \; \overrightarrow{AB} \begin{cases} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{cases} ; \; \overrightarrow{AG} \begin{cases} a \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{cases}$$

Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R_A} + \vec{R_C} + \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_{i/A}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R_C} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne trois équations scalaires :

$$R_{Ax} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} + R_{Cy} + T\cos\beta - 2P - P = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az} + R_{Cz} - T\sin\beta = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

En développant l'équation vectorielle ***(2),*** nous obtenons trois autres équations scalaires :

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{Cy} \\ R_{Cz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ T\cos\beta \\ -T\sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a\sin\alpha \\ a\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ (a/3)\sin\alpha \\ (a/3)\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-aT\sin\alpha\sin\beta - aT\cos\alpha\cos\beta + 2aP\cos\alpha + \frac{aP}{3}\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$-2aR_{Cz} + aT\sin\beta = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$2aR_{Cy} + aT\cos\beta - 2aP - aP = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Les six équations permettent de trouver toutes les inconnues :

(3) $\Rightarrow$ $R_{Ax} = 0$ ***(6)*** $\Rightarrow$ $T = 2{,}32P$; ***(7)*** $\Rightarrow$ $R_{Cz} = P$

(8) $\Rightarrow$ $R_{Cy} = 0{,}92P$; ***(5)*** $\Rightarrow$ $R_{Az} = P$; ***(4)*** $\Rightarrow$ $R_{Ay} = 0{,}92P$

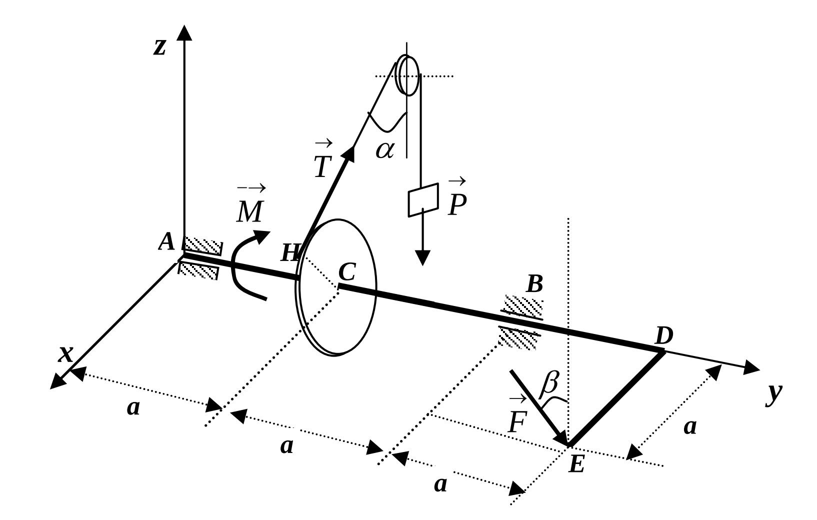
d'où : $R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = 1{,}358P$; $R_C = \sqrt{R_{Cx}^2 + R_{Cy}^2 + R_{Cz}^2} = 1{,}358P$

Exercice 12 :

Un système mécanique composé d'une barre coudée ***ADE*** de masse négligeable et d'un disque de rayon ***R*** , de masse négligeable, soudé à celle-ci au point ***C*** comme indiqué sur la figure ci-dessous. La barre est supportée par deux liaisons cylindriques en ***A*** et ***B***. On relie le disque à une poulie fixe par un câble inextensible, de masse négligeable, auquel est suspendue un poids ***P***. Au point ***E***, dans un plan parallèle au plan ***(xAz)***, est appliquée une force $\vec{F}$ inclinée par rapport à la verticale d'un angle $\beta = 30°$. Un moment $\overrightarrow{M}$ est appliqué à la barre afin de maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal ***(xAy).*** On donne ***F = 2P*** , et $\alpha = 60°$.

1. Ecrire les équations scalaires d'équilibre statique ;

2. En déduire les réactions aux points ***A*** et ***B*** ainsi que la valeur du moment ***M*** pour maintenir le système en position d'équilibre statique dans le plan horizontal ***(xAy),***



Solution :

Nous avons $AC = CB = CD = DE = a$; $F = 2P$; $\alpha = 60°$; $\beta = 60°$

La poulie de rayon *r* est aussi en équilibre statique alors : ***T r = P r*** *d'où :* ***T = P***

$$A\begin{cases}0\\0\\0\end{cases} ; \quad \overrightarrow{AB}\begin{cases}0\\2a\\0\end{cases} ; \quad \overrightarrow{AH}\begin{cases}R\cos\alpha\\a\\R\sin\alpha\end{cases} ; \quad \overrightarrow{AE}\begin{cases}a\\3a\\0\end{cases} ;$$

$$\vec{R}_A \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ 0 \\ R_{Az} \end{pmatrix}; \quad \vec{R}_B \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{pmatrix}; \quad \vec{T} \begin{pmatrix} -P\sin\alpha \\ 0 \\ P\cos\alpha \end{pmatrix}; \quad \vec{F} \begin{pmatrix} -2P\sin\beta \\ 0 \\ -2P\cos\beta \end{pmatrix}; \quad \vec{M} \begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système est en équilibre statique, nous avons alors :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{M} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AH} \wedge \vec{T} + \vec{AE} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

Projetons l'équation ***(1)*** sur les axes :

$$R_{Ax} + R_{Bx} - 2P\sin\beta - P\sin\alpha = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$0 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} - 2P\cos\beta + P\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

En développant l'équation vectorielle ***(2),*** nous obtenons trois autres équations scalaires :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -M \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R\cos\alpha \\ a \\ R\sin\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -P\sin\alpha \\ 0 \\ P\cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2P\sin\beta \\ 0 \\ -2P\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2aR_{Bz} + aP\cos\alpha - 6aP\cos\beta = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$-M - RP\cos^2\alpha - RP\sin^2\alpha + 2aPc\,os\beta = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-2aR_{Bx} + aP\sin\alpha + 6aP\sin\beta = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Le système d'équation permet de trouver toutes les inconnues.

(7) $\Rightarrow \quad M = 2aPc\,os\beta - RP = P(a\sqrt{3} - R) = P(1{,}732a - R)$

(8) $\Rightarrow \quad R_{Bx} = 3P\sin\beta + \dfrac{P}{2}\sin\alpha = \dfrac{P}{4}(6 + \sqrt{3}) = 1{,}933P$

(6) $\Rightarrow \quad R_{Bz} = 3P\cos\beta - \dfrac{P}{2}\cos\alpha = \dfrac{P}{4}(6\sqrt{3} - 1) = 2{,}348P$

(5) $\Rightarrow R_{Az} = 2P\cos\beta - P\cos\alpha - R_{Bz} = -\dfrac{P}{4}(2\sqrt{3}+1) = -1{,}116P$

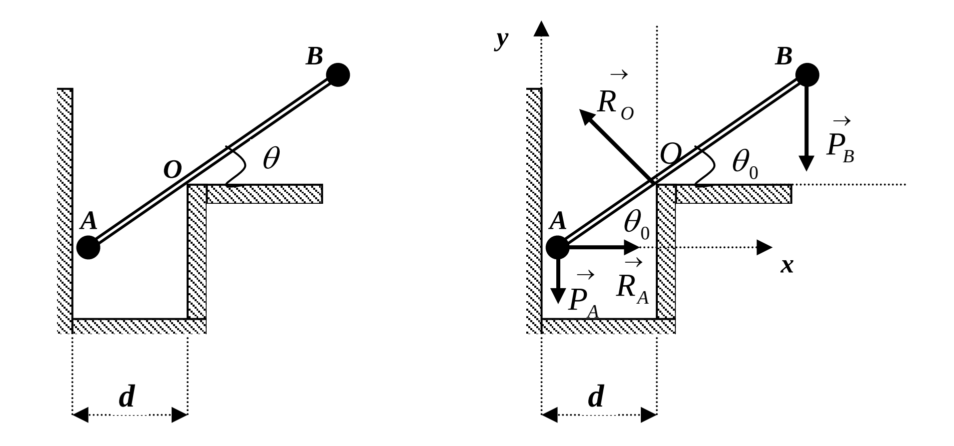
(4) $\Rightarrow R_{Ay} = R_{By} = 0$

(3) $\Rightarrow R_{Ax} = 2P\sin\beta + P\sin\alpha - R_{Bx} = \dfrac{P}{4}(\sqrt{3}-2) = 0{,}067P$

Exercice 13 :

Soit le système, constitué de deux masses ponctuelles, liées entre elles par une tige homogène de longueur ***AB= L*** et de masse négligeable. Le système est soumis à deux liaisons sans frottement en A et O. on donne $m_B = 3m_A = 3m$.

1. Trouver l'angle θ_0 qui détermine la position d'équilibre en fonction de ***m, d, L.*** ;
2. En déduire les modules des réactions aux points A et O ;
3. Calculer θ_0 , les réactions R_0 et R_A pour ***L = 20 cm, m = 0,1 Kg et d = 5 cm***



Solution :

$$\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} d \\ d\,tg\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} L\cos\theta_0 \\ L\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{R}_A\begin{pmatrix} R_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{R}_O\begin{pmatrix} -R_O\sin\theta_0 \\ R_O\cos\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{P}_A\begin{pmatrix} 0 \\ -P_A \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{P}_B\begin{pmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) le système est en équilibre statique :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_O + \vec{P}_A + \vec{P}_B = \vec{0} \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R}_O + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}_B = \vec{0} \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne :

$$R_A - R_O \sin\theta_0 = 0 \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

$$R_O \cos\theta_0 - P_A - P_B = 0 \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

L'équation ***(2)*** s'écrira :

$$\begin{pmatrix} d \\ d\, tg\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R_O \sin\theta_0 \\ R_O \cos\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\cos\theta_0 \\ L\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dR_0 \cos\theta_0 + dR_0 \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0} - P_B L \cos\theta_0 = 0 \qquad \textbf{\textit{(5)}}$$

L'équation ***(5)*** donne : $dR_0(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0) - P_B L\cos^2\theta_0 = 0$

d'où $\quad R_0 = \dfrac{P_B L}{d}\cos^2\theta_0 = \dfrac{3mgL}{d}\cos^2\theta_0$

En remplaçant l'équation ***(4)*** dans l'équation ***(5)*** on obtient :

$$\cos^3\theta_0 = \frac{4d}{3L} \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = Ar\cos\left(\frac{4d}{3L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

2) D'après l'équation **(4) :** $\quad R_O = \dfrac{P_A + P_B}{\cos\theta_0} = \dfrac{4mg}{\cos\theta_0}$

D'après l'équation **(3) :** $\quad R_A = 4mg\, tg\theta_0$

3) A.N : pour g= 10m/s^2 nous aurons : $\theta_0 = 46{,}1°$, $R_0 = 5{,}8N$, $R_A = 4{,}2N$

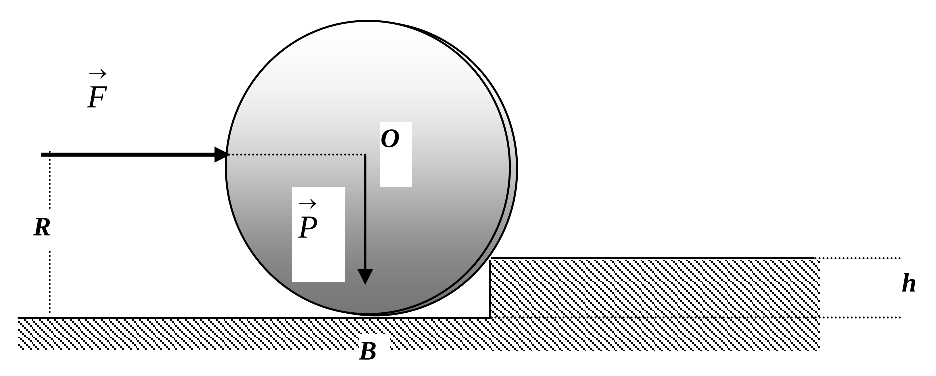
Exercice 14 :

Un disque de faible épaisseur, de rayon ***R = 30 cm*** et de poids ***P = 350 Kg*** doit passer au dessus d'un obstacle en forme d'escalier de hauteur ***h= 15 cm*** sous l'action d'une force $\vec{F}$

horizontale appliquée au point ***D*** situé à la même hauteur que le centre ***O*** du disque.

Quelle est la valeur minimale de la force F_{min} pour faire démarrer de disque ?

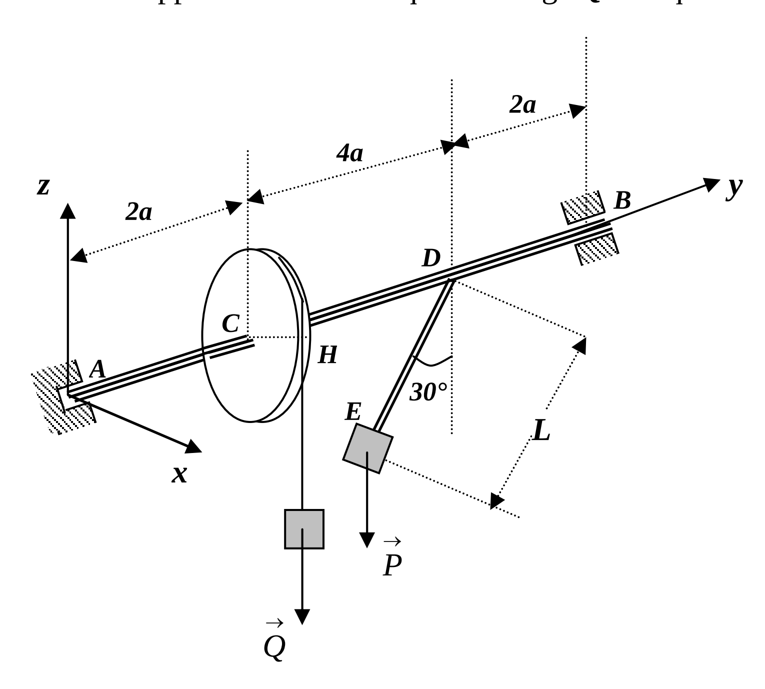
On considère que les frottements sons négligeables, et on prendra $g = 10 m/s^2$.



Exercice 15 :

Un arbre homogène horizontal ***AB*** de masse négligeable est maintenu à ses extrémités par une liaison sphérique en ***A*** et cylindrique en ***B***. Au point ***C*** est emmanchée une roue de rayon ***R*** et de masse négligeable. Un fil inextensible est enroulé autour de la roue et porte une charge ***Q***. Une tige ***DE***, de masse négligeable, est soudée à l'arbre au point ***D*** . Elle supporte à son extrémité ***E*** une charge ***P*** de telle sorte qu'elle fasse un angle de ***30°*** à l'équilibre avec la verticale, dans le plan ***(xDz)***. On donne : $P = 15000\ N$; $a = 0,5\ m$; $L = 1\ m$; $R = 0,3\ m$.

Déterminer les réactions aux appuis ***A*** et ***B*** ainsi que la charge ***Q*** à l'équilibre statique.



Solution :

P=1500 N ; a = 0,5 m ; DE=L=1m ; R=0,3m ; AC=DB= 2a ; CD=4a

Nous avons: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\8a\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}R\\2a\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-L\sin 30°\\6a\\-L\cos 30°\end{pmatrix}$; $\vec{R}_A\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\\R_{Az}\end{pmatrix}$; $\vec{R}_B\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix}$; $\vec{Q}\begin{pmatrix}0\\0\\-Q\end{pmatrix}$; $\vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix}$

1) le système est en équilibre statique :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{Q} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\wedge\vec{R}_B + \overrightarrow{AH}\wedge\vec{Q} + \overrightarrow{AE}\wedge\vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne :

$$R_{Ax} - R_{Bx} = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} - Q - P = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

L'équation vectorielle (2) se traduit par :

$$\begin{pmatrix}0\\8a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}R_{Bx}\\0\\R_{Bz}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}R\\2a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-Q\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-L\sin 30°\\6a\\-L\cos 30°\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

En développant cette expression on aboutit à trois équations scalaires :

$$8aR_{Bz} - 2aQ - 6aP = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$RQ - LP\sin 30° = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$8aR_{Bx} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

On déduit facilement des six équations scalaires la réaction en ***A*** et ***B*** ainsi que la charge ***Q.***

(8) $\Rightarrow R_{Bx} = 0$; ***(7)*** $\Rightarrow Q = \dfrac{LP}{R}\sin 30° = 25000N$

(6) $\Rightarrow R_{Bz} = \dfrac{2Q+6P}{8} = 7375N$; ***(5)*** $\Rightarrow R_{Az} = Q + P - R_{Bz} = 19125N$

(4) $\Rightarrow R_{Ay} = 0$; ***(3)*** $\Rightarrow R_{Ax} = R_{Bx} = 0$

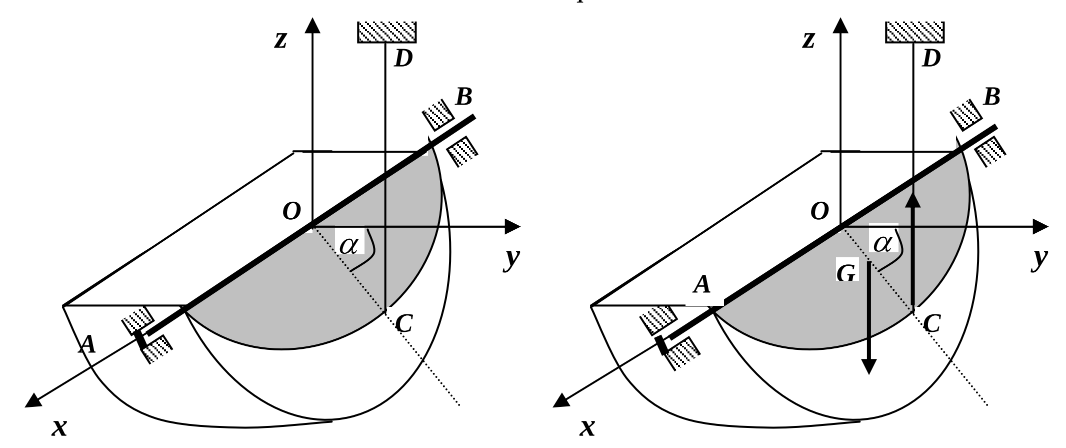
$$R_A = R_{Az} = 19125N \quad ; \quad R_B = R_{Bz} = 7375N$$

Exercice 16 :

Un couvercle homogène ayant la forme d'un demi disque de rayon ***a*** de poids P est maintenu par un axe horizontal ***AB*** avec une liaison sphérique en ***A*** et cylindrique en ***B***. Une corde inextensible ***CD*** , de masse négligeable est attaché au point ***C*** et soulève le couvercle de tel sorte qu'il fasse un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe horizontal ***(oy)***. L'autre extrémité est attaché au point ***D (- a,0, a).*** On donne : ***OA = OB = a***

Le centre d'inertie ***G*** du couvercle est situé sur l'axe ***OC*** et tel que : $OG = \dfrac{4a}{3\pi}$

1. Ecrire les équations scalaires d'équilibre ;
2. En déduire les réactions des liaisons ***A*** et ***B*** ainsi que la tension de la corde.



Solution :

Nous avons: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -a \\ a\cos 30° \\ -a\sin 30° \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -a \\ \dfrac{4a}{3\pi}\cos 30° \\ -\dfrac{4a}{3\pi}\sin 30° \end{pmatrix}$

Déterminons les composantes de $\vec{T}$, en effet nous pouvons écrire : $\vec{T} = T\,\vec{u}_{CD} = T\dfrac{\overrightarrow{CD}}{CD}$

$$\vec{T} = T\frac{-a\,\vec{i} - 0{,}866a\,\vec{j} + 1{,}5a\,\vec{k}}{a\sqrt{(-1)^2 + (-0{,}866)^2 + (1{,}5)^2}} = -0{,}5T\,\vec{i} - 0{,}433T\,\vec{j} + 0{,}750T\,\vec{k}$$

d'où : $\vec{R}_A\begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix}$; $\vec{R}_B\begin{pmatrix} 0 \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix}$; $\vec{T}\begin{pmatrix} -0{,}5T \\ -0{,}433T \\ 0{,}750T \end{pmatrix}$; $\vec{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$

1) Le système est en équilibre statique :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\sum_i \vec{M}_{i/A} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \vec{0} \qquad \textbf{(2)}$$

La projection de l'équation ***(1)*** sur les axes donne :

$$R_{Ax} - 0{,}5T = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 0{,}433T = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$R_{Az} + R_{Bz} + 0{,}750T - P = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

L'équation vectorielle (2) se traduit par :

$$\begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{By} \\ R_{Bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ (a\sqrt{3})/2 \\ -(a/2) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}5T \\ -0{,}433T \\ 0{,}750T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ (2a\sqrt{3})/3\pi \\ -(2a)/3\pi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.0{,}750aT - \frac{0{,}433}{2}aT - \frac{2a\sqrt{3}}{3\pi}P = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

$$2aR_{Bz} + 0{,}750aT + 0{,}25aT - aP = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$-2aR_{By} + 0{,}433aT + \frac{\sqrt{3}}{2}.0{,}5aT = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

(6) $\Leftrightarrow \quad 0{,}432T - 0{,}367P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}849P$

(7) $\Leftrightarrow \quad 2R_{Bz} + T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bz} = \dfrac{P-T}{2} = 0{,}075P$

(8) $\Leftrightarrow \quad 2R_{By} + 0{,}866T = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{By} = -0{,}433T = -0{,}367P$

(3) $\Leftrightarrow \quad R_{Ax} - 0{,}5T = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = 0{,}5T = 0{,}424P$

(4) $\Leftrightarrow \quad R_{Ay} - 0{,}433T - 0{,}433T = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = 0{,}866T = 0{,}735P$

(5) $\Leftrightarrow \quad R_{Az} + 0{,}075P + 0{,}750T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Az} = 0{,}288P$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = P\sqrt{(0{,}424)^2 + (0{,}735)^2 + (0{,}288)^2} = 0{,}896P$$

$$R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = P\sqrt{(-0{,}367)^2 + (0{,}075)^2} = 0{,}374P$$

CHAPITRE IV

GEOMETRIE DES MASSES

GEOMETRIE DES MASSES

Objectifs du chapitre

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

1. Notions de masse d'un système matériel

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : **masse du système**

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

Cet invariant scalaire obéit aux propriétés mathématiques suivantes :

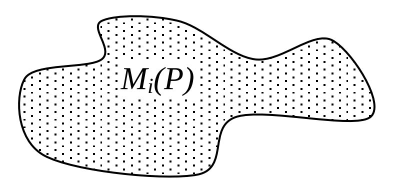
Aditivité des masses

La masse d'un système matériel (S) est égale à la somme des masses qui le composent.

Exemple : masse d'un livre = somme des masses des feuilles qu'il contient.

La masse d'un système matériel est définie par la grandeur scalaire suivante :

$$M = \int_{P \in (S)} dm(P)$$

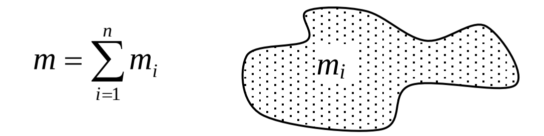


L'élément $dm(P)$ est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

Un système matériel est un ensemble discret ou continu des points matériels ou encore une réunion d'ensembles continus ou discrets de points matériels.

1.1. Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses m_i :



1.2. Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue : $m = \int_{(S)} dm(P)$

- **Le système (S) est un volume**

  La masse s'écrirait : $m = \int_V \rho(P) dv$

  $\rho(P)$ est la masse volumique au point P et dv un élément de volume du solide (S)

- **Le système (S) est une surface :** (cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

  La masse s'écrirait : $m = \int_S \sigma(P) ds$

  $\sigma(P)$ est la densité surfacique au point P et ds un élément de surface du solide (S)

- **Le système (S) est linaire :** (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

  La masse s'écrirait : $m = \int_L \lambda(P) dl$

  $\lambda(P)$ est la densité linéique au point P et -un élément de longueur du solide (S)

  Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

2. Centre d'inertie (centre de masse) des solides

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}$$

où P est un point du solide avec $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{i} + y_G\,\vec{j} + z_G\,\vec{k}$

Soit O le centre d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous pouvons écrire dans ce repère : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ $\quad \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\, dm + \underbrace{\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm}_{=0}$ alors nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P\in(S)} dm} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que : *dl* pour les éléments linéaires, *ds* pour les éléments surfaciques et *dv* pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

$$x_G = \frac{\int_{P\in(S)} x\; dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} x\; dm, \quad y_G = \frac{\int_{P\in(S)} y\; dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} y\; dm \quad , \quad z_G = \frac{\int_{P\in(S)} z\; dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} z\; dm$$

Remarques :

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

3. Centre d'inertie d'un système composé

Dans la réalité c'est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en résonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément Δ_i du système au point G_i , puis on détermine le centre d'inertie G du système comme barycentre des points G_i .

Soient les éléments d'un système composé : $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta_n$ ayant pour centres d'inertie respectifs : $G_1, G_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, G_n$ ayant pour vecteurs positions dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{r_n}$:

Le centre d'inertie de ce système est donné par : $\vec{r_G} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}\ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$; où Δ_i est la i[ième] quantité.

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d'inertie du système aura pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i\ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$$

où : x_i, y_i, z_i sont les coordonnées des points G_i où l'élément Δ_i est concentré.

Si les Δ_i sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\ m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\ m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i\ m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

4. Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

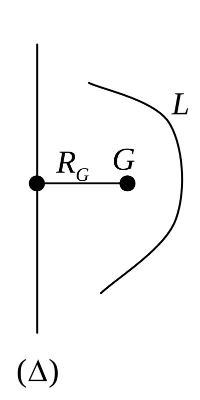
4.1. 1er Théorème de Guldin

La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur L autour d'un axe (Δ) sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi R_G$ décrite par le centre d'inertie G de l'arc de courbe.

Soit L la longueur de l'arc et R_G sont centre d'inertie.

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2\pi\ R_G\ L \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2\pi L}$$



Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \dfrac{S_{totale/\Delta}}{2\pi L_{totale}}$

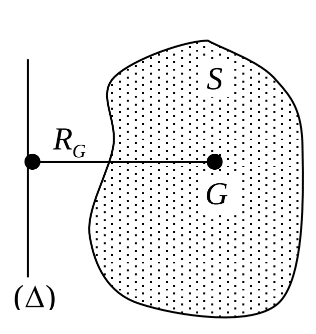
si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{S_{/oy}}{2\pi L}$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{S_{/ox}}{2\pi L}$

4.2. 2ième Théorème de Guldin

Une surface plane homogène S , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe (Δ) sans le rencontrer engendre un volume V.

Le volume V engendré est égal au produit de la surface S par la longueur du périmètre $2\pi R_G$ décrit par le centre d'inertie G de cette surface autour de l'axe (Δ).



Soit S la surface et R_G la distance de son centre d'inertie à (Δ).

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2\pi \; R_G \; \text{S} \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2\pi S}$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :

$$R_G = \frac{V_{totale/\Delta}}{2\pi \; \text{S}_{totale}}$$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{V_{total/oy}}{2\pi \; S_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{V_{total/ox}}{2\pi \, S_{totale}}$

5. Opérateur d'inertie (tenseur d'inertie) : Moment d'inertie et produit d'inertie

La notion d'opérateur d'inertie permet d'exprimer les divers torseurs, déjà vue précédemment, afin de faciliter l'étude de la cinétique et de la dynamique des solides.

5.1 Opérateur produit vectoriel

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{V}$ dont les composantes sont exprimées dans une base orthonormée directe $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad , \quad \vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs s'écrit : $\vec{u}\wedge\vec{V} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_y X \end{bmatrix}$

Comme le vecteur $\vec{u}$ est connu et $\vec{V}$ quelconque, on constate que l'on peut passer du vecteur $\vec{V}$ au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$ par une opération linéaire très simple à vérifier. Le produit vectoriel est distributif, par rapport à l'addition et à la multiplication, nous pouvons alors écrire :

$\forall \ \lambda \in IR$ et $\forall \vec{V} \in IR^3$ on a : $\vec{u} \wedge \lambda \vec{V} = \lambda (\vec{u} \wedge \vec{V})$

$\forall \vec{V_1}, \vec{V_2} \in IR^3$ on a aussi : $\vec{u} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{u} \wedge \vec{V_1} + \vec{u} \wedge \vec{V_2}$

on peut conclure que l'on passe du vecteur $\vec{V}$ au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$, par application d'un opérateur linéaire que l'on notera : $[A]$; d'où l'écriture : $\vec{u} \wedge \vec{V} = [A]\vec{V}$ qui se traduit sous forme matricielle dans la base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\begin{bmatrix} u_y Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_y X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique dans cette base.

Pour déterminer le tenseur d'inertie, nous avons besoin d'un nouvel opérateur qui est le double produit Vectoriel : $\left(\vec{u} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{u}) \right) = -\left(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V}) \right)$ car le produit vectoriel est antisymétrique. D'après les relations précédentes, nous pouvons écrire cet opérateur sous la forme : $\left(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V}) \right) = \vec{u} \wedge \left([A]\vec{V} \right) = [A]^2 \vec{V}$.

Cet opérateur est aussi un opérateur linéaire et son écriture sous la forme matricielle dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est la suivante : $[A]^2 = \begin{bmatrix} -(u_y^2+u_z^2) & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & -(u_x^2+u_z^2) & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & -(u_x^2+u_y^2) \end{bmatrix}$

On voit bien que la matrice $[A]^2$ est symétrique et de même pour la matrice $[B]=-[A]^2$, alors nous utiliserons cette dernière afin de représenter les tenseurs d'inertie d'un solide dans une base orthonormée $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5.2. Opérateur d'inertie

5.2.1. Définition du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide de masse dm lié à une tige *(AA')* de masse négligeable, en rotation autour d'un axe (Δ). Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe (Δ). L'étude dynamique de ce système se fera dans les prochains chapitres. Le temps nécessaire à cet élément de masse dm pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse dm et au carré de la distance r qui sépare la masse de l'axe (Δ). C'est pour cette raison que le produit $r^2 dm$ est appelé moment d'inertie de la masse dm par rapport à l'axe (Δ).

5.2.2. Matrice d'inertie : Moments et produits d'inertie d'un solide

Soit un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et un solide *(S)* tel que $O \in (S)$. Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O est obtenu en intégrant la relation $r^2 dm$. $I_O = \int_{(S)} r^2 dm$

les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration *dm(P)* est situé en un point P du solide.

L'opérateur d'inertie s'écrit : $I_O(\vec{V}) = -\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V})dm$, le vecteur $\vec{V}$ est indépendant du point P . Le point P est un point quelconque du solide *(S)* et dm est l'élément de masse entourant le point P . Le tenseur d'inertie du solide au point O est représenté dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par une matrice notée $I_O(S)_{/R}$: appelée matrice d'inertie en O dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ du solide *(S)* :

$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

La matrice $I_O(S)_{/R}$ est symétrique, réelle et diagonisable. Elle admet trois valeurs propres réelles et trois directions propres réelles et orthogonales.

- Les valeurs propres sont appelées moments principaux d'inertie ;
- Les directions propres sont appelées axes principaux d'inertie.

Si le point P a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour expression : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et d'après ce que l'on vient de voir précédemment, $I_O(\vec{V}) = -\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V})dm$, les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Ox)* : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oy)* : $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oz)* : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm$

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxy)* : $I_{xy} = \int_{(S)} xydm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxz)* : $I_{xz} = \int_{(S)} xzdm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oyz)* : $I_{yz} = \int_{(S)} yzdm$: ou produit d'inertie

5.2.3. Solides présentant des plans de symétrie

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

(xOy) plan de symétrie ====> $I_{xz} = I_{yz} = 0$

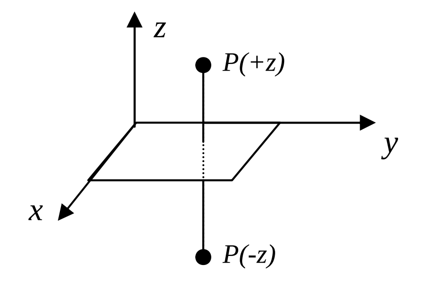
(yOz) plan de symétrie ====> $I_{xz} = I_{xy} = 0$

(xOz) plan de symétrie ====> $I_{xy} = I_{yz} = 0$

a) si *(xOy)* est un plan de symétrie du solide

P(+z) est symétrique du point *P(-z)* par rapport au plan *(xOy)* d'où :

$\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} yzdm = 0$ donc $I_{xz} = I_{yz} = 0$



$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Oz}$ qui est perpendiculaire au plan *(xOy)* est un axe principal d'inertie ; nous pouvons le montrer facilement par le produit suivant :

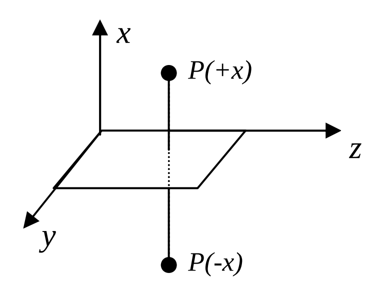
$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = I_{zz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En effet, tout axe orthogonal à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie sur tous les points du plan.

b) si *(yOz)* est un plan de symétrie du solide

P(+x) est symétrique du point *P(-x)* par rapport au plan *(yOz)* d'où :

$\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$ donc $I_{xz} = I_{xy} = 0$



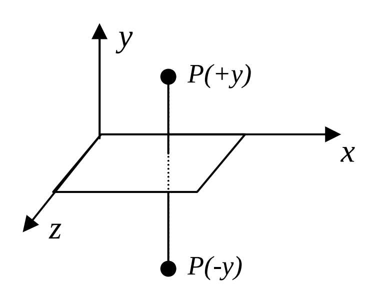
$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Ox}$ perpendiculaire au plan *(yOz)* est un axe principal d'inertie .

c) si *(xOz)* est un plan de symétrie du solide

P(+y) est symétrique du point *P(-y)* par rapport au plan *(xOz)* d'où :

$\int_{P\in(S)} yzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$ donc $I_{yz} = I_{xy} = 0$



$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Oy}$ perpendiculaire au plan *(xOz)* est un axe principal d'inertie.

5.2.4 Solides présentant un axe de symétrie

Soit $\overrightarrow{Ox}$ un axe de symétrie matérielle d'un solide *(S)*. Pour chaque élément de masse *dm* du solide ayant une coordonnée *(+x)* nous pouvons lui associer un élément *dm* symétrique

par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et de coordonnée *(-x)* de telle sorte que: $\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$

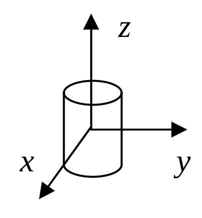
On remarque de la même manière que précédemment, l'axe $\overrightarrow{Ox}$ est un axe principal d'inertie. Tout axe de symétrie matériel est un axe principal d'inertie sur tous les points de l'axe.

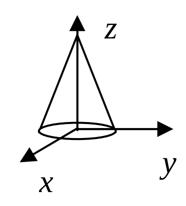
Remarques

- Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.
- Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.

5.3. Solides à symétrie de révolution

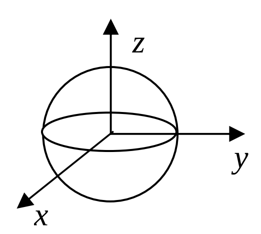
Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc…), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution $\overrightarrow{Oz}$ dans un repère orthonormé $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Tout plan passant par l'axe $\overrightarrow{Oz}$ est un plan de symétrie, d'après ce que l'on a vu précédemment tous les produits d'inertie sont nuls. $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$





5.4. Solides à symétrie sphériques

Pour tout solide à symétrie sphérique (sphère pleine où creuse) de centre O, tous les repères $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ ayant pour centre le même point O sont des repères principaux d'inertie.
Les trois axes du repère jouent le même rôle, alors tous les moments d'inertie sont égaux :



$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ et tous les produits d'inertie sont nuls car tous les plans sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm + \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm = 2\int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

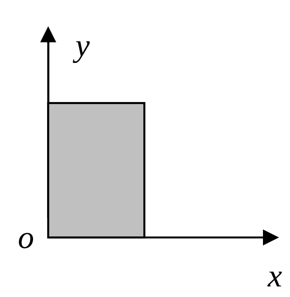
$$I_{xx} = \frac{2}{3}\int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

5.5. Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément , dm est nulle. Si le solide est dans le plan (xOy) alors z = 0 .

On déduit immédiatement que : $I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm$, $I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm$ d'où :

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm = I_{xx} + I_{yy} \text{ ; et } I_{xz} = I_{yz} = 0 \text{ ; } I_{xy} = \int_{(S)} xydm$$

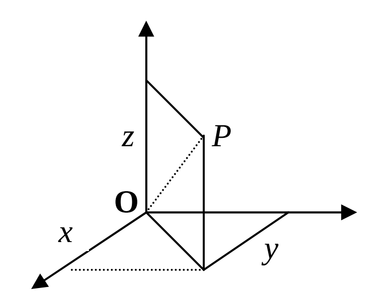


Le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du solide est égal à la somme des moments par rapport aux deux axes du plan du solide.

5.6. Moments d'inertie par rapport à *O* , aux axes et aux plans du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Le moment d'inertie d'un solide *(S)* déjà défini précédemment par rapport à un point *O*, un axe où un plan est donné par l'intégrale : $\int_{(S)} r^2 dm(P)$ où *P* est un point du solide et *r* la distance du point *P* par rapport au point *O*, par rapport à l'axe ou par rapport aux plans du repère.

a) Moment d'inertie par rapport au point *O*.



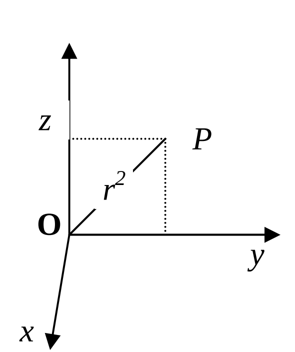
il est donné par : $I_O = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

alors : $I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm(P)$

b) Moment d'inertie par rapport aux axes

b.1.) axe $\overrightarrow{Ox}$



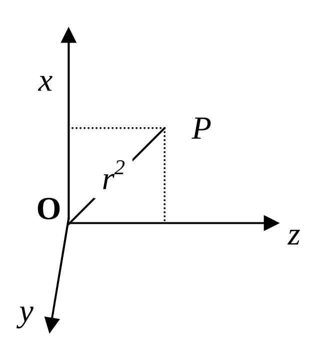
il est donné par : $I_{xx} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Ox;

d'où $OP^2 = y^2 + z^2$; alors : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm(P)$



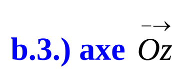
b.2.) axe $\overrightarrow{Oy}$



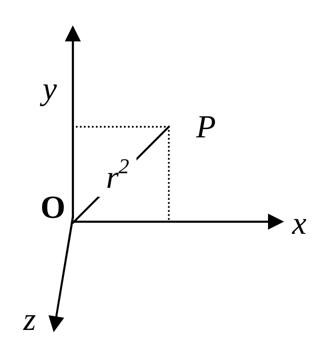
il est donné par : $I_{yy} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oy ;

d'où $OP^2 = x^2 + z^2$; alors : $I_{xx} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm(P)$



b.3.) axe $\overrightarrow{Oz}$



il est donné par : $I_{zz} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oz ;

d'où $OP^2 = x^2 + y^2$; alors : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm(P)$

Les moments d'inertie par rapport aux plans *(xOy)*, *(xOz)*, *(yOz)* sont donnés en fonction de la distance qui sépare le point *(P)* du plan considéré, ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$I_{xOy} = \int_{(S)} z^2 dm(P) \quad , \quad I_{xOz} = \int_{(S)} y^2 dm(P) \quad , \quad I_{yOz} = \int_{(S)} x^2 dm(P)$$

Il résulte des différentes relations précédentes que :

a) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport aux trois axes d'un repère orthonormé est égale au double du moment d'inertie du solide par rapport au centre du repère.

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

$$= 2 \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 I_O$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 I_O$$

b) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport à deux plans perpendiculaires est égale au moment d'inertie du solide par rapport à l'axe d'intersection des deux plans.

$$I_{yOx} + I_{zOx} = I_{xx} \quad , \quad I_{xOy} + I_{zOy} = I_{yy} \quad , \quad I_{xOz} + I_{yOz} = I_{zz}$$

6. Détermination des axes principaux et des moments principaux d'inertie

Soit une matrice d'inertie d'un solide *(S)*, dans une base orthonormée $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de la forme : $I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$, il existe au moins une base orthonormée de même centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, notée $R_P(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ appelée base principale ou repère principal d'inertie au point *O*.

Dans cette base principale, les axes $(O,\vec{e_1})$, $(O,\vec{e_2})$, $(O,\vec{e_3})$ sont les axes principaux d'inertie et la matrice d'inertie est une matrice diagonale. Les éléments de cette diagonale sont appelés moments principaux d'inertie dans cette base.

La matrice d'inertie dans la base $R_P(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ s'écrirait : $I_O(S)_{/R_P} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$

avec I_1, I_2, I_3 moments principaux.

Les axes $(O,\vec{e_1})$, $(O,\vec{e_2})$, $(O,\vec{e_3})$ étant des axes principaux, nous pouvons écrire :

$$I_O(S)_{/R}\,\vec{e_1} = I_1\,\vec{e_1} \quad , \quad I_O(S)_{/R}\,\vec{e_2} = I_2\,\vec{e_2} \quad , \quad I_O(S)_{/R}\,\vec{e_3} = I_3\,\vec{e_3}$$

D'une façon générale nous aurons :

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A-I_1 & -F & -E \\ -F & B-I_2 & -D \\ -E & -D & C-I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

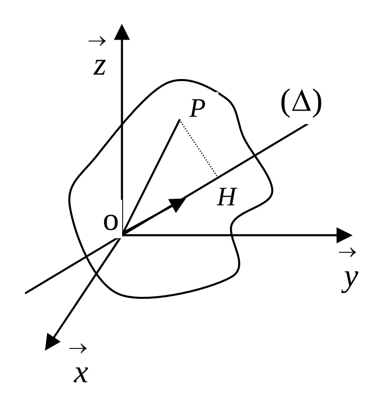
Les vecteurs unitaires $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ ne sont pas nuls, alors ce système admet une solution si le déterminant de la matrice est nul : $\begin{vmatrix} A-I_1 & -F & -E \\ -F & B-I_2 & -D \\ -E & -D & C-I_3 \end{vmatrix} = 0$

La solution de cette équation scalaire donne les trois valeurs propres qui sont les moments principaux d'inertie. En reportant ces valeurs propres dans l'équation $I_O(S)_{/R}\,\vec{e_i} = I_i\,\vec{e_i}$ on obtient les vecteurs propres qui ne sont autre que les directions principales.

7. Moment d'inertie par rapport à un axe $\Delta(O,\vec{n})$ quelconque dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Soit *(P)* un point du solide *(S)* de masse m et un axe (Δ) passant par le centre O du repère de vecteur unitaire $\vec{n}$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) est donné par :

$I_\Delta = \int_{(P\in S)} r^2 dm = \int_{(P\in S)} HP^2 dm$; avec $HP = \left|\overrightarrow{HP}\right| = r$; distance de l'élément matériel *dm(P)* à l'axe (Δ), H est la projection orthogonale de P sur cet axe.



Nous avons : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}$, on déduit que : $\vec{n}\wedge(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}) = \vec{n}\wedge\overrightarrow{OH} + \vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}$

Comme $\begin{cases} \vec{n} // \overrightarrow{OH} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{HP} \end{cases}$ et $\left|\vec{n}\right| = 1$ alors : $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = r$

Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OP}$ ont pour coordonnées $\vec{n} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ et $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par l'axe (Δ) sont appelées cosinus directeurs.

Nous avons alors $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix}$

D'où : $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right|^2 = \left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}\right|^2 = (\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2 = r^2$

En remplaçant r^2 dans l'expression : $I_\Delta = \int_{(P\in S)} r^2 dm$ on aboutit à :

$$I_\Delta = \int_{(P\in S)} \left((\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2\right)dm$$

$$I_\Delta = \alpha^2\int_{(P\in S)}(y^2+z^2)dm + \beta^2\int_{(P\in S)}(x^2+z^2)dm + \gamma^2\int_{(P\in S)}(x^2+y^2)dm$$
$$-2\alpha\beta\int_{(P\in S)}xydm - 2\alpha\gamma\int_{(P\in S)}xzdm - 2\beta\gamma\int_{(P\in S)}yzdm$$

$I_\Delta = \alpha^2 I_{xx}+\beta^2 I_{yy}+\gamma^2 I_{zz} -2\alpha\beta I_{xy}-2\alpha\gamma I_{xz}-2\beta\gamma I_{yz}$; cette expression représente l'ellipsoïde d'inertie, elle peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$I_\Delta = (\alpha \quad ,\beta \quad ,\gamma)\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \vec{n}^T.I_O(S).\vec{n}$$

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par un point O et de vecteur unitaire $\vec{n}$ est égal au produit doublement contracté du tenseur d'inertie O par le vecteur unitaire $\vec{n}$.

8. Produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$

8.1. Définition

Le produit d'inertie noté I_{uv} est défini comme étant l'intégrale des coordonnées x_u et x_v du point P relativement au axes $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$: $I_{uv} = \int_{P(S)} x_u x_v dm$

x_u : coordonnée de P sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ tel que : $x_u = \overrightarrow{OP}\bullet\vec{u}$

x_v : coordonnée de P sur l'axe $\Delta'(O,\vec{v})$ tel que : $x_v = \overrightarrow{OP}\bullet\vec{v}$

Le tenseur d'inertie étant connu au point O , le produit d'inertie par rapport aux deux axes a pour expression : $I_{uv} = -\vec{v}.I_O(S).\vec{u}$

8.2. Démonstration

Deux propriétés vectorielles seront utilisées dans la démonstration de l'expression du produit d'inertie :

- le produit mixte dont on connaît la règle de permutation :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2) = (\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)$$

- le double produit vectoriel dont on connaît le résultat.

$$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \bullet (\vec{C} \wedge \vec{D}) = (\vec{A} \bullet \vec{C})(\vec{B} \bullet \vec{D}) - (\vec{A} \bullet \vec{D})(\vec{B} \bullet \vec{C})$$

on pose : $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{B} = \vec{u}$, $\vec{C} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{D} = \vec{v}$

$$(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}) \bullet (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}) = (\overrightarrow{OP} \bullet \vec{u})(\vec{u} \bullet \vec{v}) - (\overrightarrow{OP} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP}) = -(\overrightarrow{OP} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP})$$

car : $(\vec{u} \bullet \vec{v}) = 0$

$$(\overrightarrow{OP} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP}) = -(\overrightarrow{OP} \wedge \vec{u}) \bullet (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{v})$$

$$= -(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) \bullet (\vec{v} \wedge \overrightarrow{OP})$$

$$= -\left((\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}),\ \vec{v},\ \overrightarrow{OP} \right)$$

$$(\overrightarrow{OP} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP}) = -\left((\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}),\ \vec{v},\ \overrightarrow{OP} \right) = -\left(\vec{v},\ \overrightarrow{OP},\ (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) \right) = -\vec{v} \bullet (\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})$$

$$= -\vec{v} \bullet \left[\vec{u}(\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{OP}(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP}) \right] = -\underbrace{\left(\vec{v} \bullet \vec{u} \right)(\overrightarrow{OP} \bullet \overrightarrow{OP})}_{1} + \underbrace{\left(\vec{v} \bullet \overrightarrow{OP} \right)(\vec{u} \bullet \overrightarrow{OP})}_{2}$$

Soit : $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$; $\vec{u} = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$; $\vec{v} = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$

(1) : $-\left(\vec{v}\bullet\vec{u}\right)(\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP}) = -(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)(x^2+y^2+z^2)$

$$= -v_1u_1(x^2+y^2+z^2) - v_2u_2(x^2+y^2+z^2) - v_3u_3(x^2+y^2+z^2)$$

(2) $\left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{OP}\right)(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP}) = (v_1x+v_2y+v_3z)(u_1x+u_2y+u_3z) = v_1u_1\,x^2 + v_1u_2\,xy + v_1u_3\,xz$

$$+ v_2u_1\,xy + v_2u_2\,y^2 + v_2u_3\,yz$$
$$+ v_3u_1\,xz + v_3u_2\,yz + v_3u_3\,z^2$$

$$(1)+(2) \Rightarrow x_u.x_v = -v_1u_1(y^2+z^2) - v_2u_2(x^2+z^2) - v_3u_3(x^2+y^2)$$
$$+(v_1u_2+v_2u_1)\,xy + (v_1u_3+v_3u_1)\,xz + (v_2u_3+v_3u_2\,yz$$

Le produit d'inertie est donné par l'intégrale : $I_{uv} = \int\limits_{P(S)} x_u x_v dm$ d'où

$$I_{uv} = -v_1u_1\int\limits_{P\in S}(y^2+z^2)dm - v_2u_2\int\limits_{P\in S}(x^2+z^2)dm - v_3u_3\int\limits_{P\in S}(x^2+y^2)dm$$
$$+(v_1u_2+v_2u_1)\int\limits_{P\in S}xydm + (v_1u_3+v_3u_1)\int\limits_{P\in S}xzdm + (v_2u_3+v_3u_2)\int\limits_{P\in S}yzdm$$

Cette expression s'écrira sous forme matricielle :

$$I_{uv} = (-v_1,-v_2,-v_3)\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad I_{uv} = -\vec{v}.I_O(S).\vec{u}$$

Le produit d'inertie du solide *(S)* par rapport aux axes orthogonaux $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$ est égal à l'opposé du produit doublement contracté du tenseur d'inertie $I_O(S)$ par les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

9. Changement de repère.

Soit un repère orthonormé fixe: $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et un repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en rotation par rapport à celui-ci. A l'aide de la matrice de passage nous pouvons exprimer le moment d'inertie dans l'un des repères et le déduire dans l'autre repère et inversement.

En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix} = P_{R_1\to R_0}\begin{pmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{pmatrix} = P_{R_0\to R_1}\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix} \quad , \text{ avec } : P_{R_0\to R_1} = P^T_{R_1\to R_0}$$

La matrice de passage de R_0 vers R_1 notée : $P_{R_0\to R_1}$; permet de déduire la matrice d'inertie du solide dans le repère R_1 en la connaissant dans le repère R_0 et inversement.

$$I_O(S)_{/R_1} = P^T_{R_0\to R_1}.I_O(S)_{/R_0}.P_{R_0\to R_1}$$

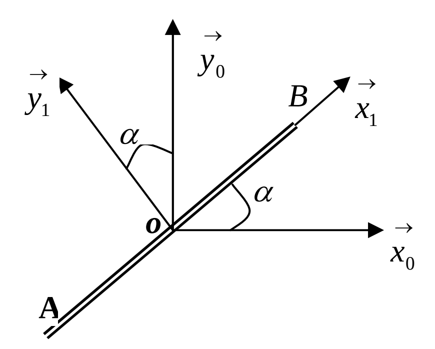
$$I_O(S)_{/R_0} = P^T_{R_1\to R_0}.I_O(S)_{/R_1}.P_{R_1\to R_0}$$

Exemple d'application :

Déterminer la matrice d'inertie de la barre AB de longueur L de masse m dans le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en rotation par rapport au repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

En déduire la matrice d'inertie dans le repère R_0.

On détermine la matrice d'inertie de la barre dans le repère R_1 : Nous avons un solide linéaire : $dm = \lambda dx$; $y = 0$ et $z = 0$ d'où : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ et $I_{xx} = 0$



$$I_{yy} = I_{zz} = \int_{(S)} x^2 dm = \int_{-L}^{+L} x^2 \lambda dx = \frac{mL^2}{3} \quad \text{d'où : } I_O(S)_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$$

On détermine la matrice de passage de R_1 vers R_0 en exprimant les vecteurs unitaires de R_1 en fonction de ceux de R_0 :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos\alpha\, \vec{x}_0 + \sin\alpha\, \vec{y}_0 + 0.\vec{z}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin\alpha\, \vec{x}_0 + \cos\alpha\, \vec{y}_0 + 0.\vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 &= 0.\vec{x}_0 + 0.\vec{y}_0 + \vec{z}_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}$$

avec : $P_{R_1 \to R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_{R_0 \to R_1} = P^T_{R_1 \to R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice d'inertie dans le repère R_0 sera égale à : $I_O(S)_{/R_0} = P^T_{R_1 \to R_0} . I_O(S)_{/R_1} . P_{R_1 \to R_0}$

$$I_O(S)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

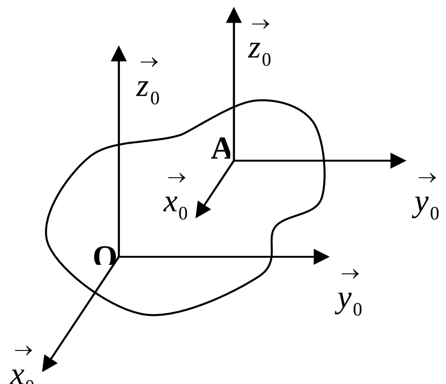
$$I_O(S)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3}\sin^2\alpha & -\frac{mL^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\frac{mL^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{mL^2}{3}\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_0}$$

10. Translation du repère R de centre O vers un centre A

On considère un solide *(S)* dont la matrice d'inertie est connue au point O d'un repère fixe $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Soit un point A de coordonnées (x_A,y_A,z_A) centre du repère $R(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ en translation par rapport à $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

La matrice d'inertie au point A du solide *(S)* est donnée par :

$$I_A(S)_{R_0}=\begin{bmatrix} I_{Axx} & -I_{Axy} & -I_{Axz} \\ -I_{Axy} & I_{Ayy} & -I_{Ayz} \\ -I_{Axz} & -I_{Ayz} & I_{Azz} \end{bmatrix}_{R_0}$$



Les éléments de cette matrice s'obtiennent en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{OP}$ comme précédemment par le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans l'opérateur d'inertie.

Nous avons en effet : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(x-x_A)\,\vec{x}_0+(y-y_A)\,\vec{y}_0+(z-z_A)\,\vec{z}_0$

On obtient ainsi les moments et les produits d'inertie en A :

$$I_{Axx}=\int_{(S)}\left((y-y_A)^2+(z-z_A)^2\right)dm$$

$$I_{Axx}=\int_{(S)}(y^2+z^2)dm+y_A^2\int_{(S)}dm+z_A^2\int_{(S)}dm-2y_A\int_{(S)}ydm-2z_A\int_{(S)}zdm$$

Soit m la masse du solide *(S)* et G son centre d'inertie. Les coordonnées (x_G,y_G,z_G) du centre d'inertie dans le repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ déjà exprimé au début du chapitre, ont pour expression : $x_G=\dfrac{1}{m}\int_{(S)}xdm$; $y_G=\dfrac{1}{m}\int_{(S)}ydm$; $z_G=\dfrac{1}{m}\int_{(S)}zdm$

$$\int_{(S)}xdm=mx_G \quad ; \quad \int_{(S)}ydm=my_G \quad ; \quad \int_{(S)}zdm=mz_G$$

En remplaçant ces termes dans l'expression de I_{Axx} , on obtient :

$I_{Axx} = I_{Oxx} + m\left((y_A^2 + z_A^2) - 2y_A y_G - 2z_A z_G\right)$, et par permutation les autres termes

$$I_{Ayy} = I_{Oyy} + m\left((x_A^2 + z_A^2) - 2x_A x_G - 2z_A z_G\right)$$

$$I_{Azz} = I_{Ozz} + m\left((x_A^2 + y_A^2) - 2x_A x_G - 2y_A y_G\right)$$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Axy} = \int_{(S)} (x - x_A)(y - y_A)dm = \int_{(S)} xydm - x_A \int_{(S)} ydm - y_A \int_{(S)} xdm + x_A y_A \int_{(S)} dm$$

$I_{Axy} = I_{Oxy} - m\left((x_A y_G + y_A x_G - x_A y_A\right)$ et par permutation les autres termes

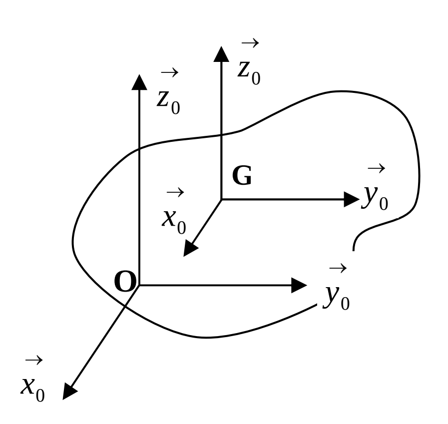
$$I_{Axz} = I_{Oxz} - m\left((x_A z_G + z_A x_G - x_A z_A\right)$$

$$I_{Ayz} = I_{Oyz} - m\left((y_A z_G + z_A y_G - y_A z_A\right)$$

11. Théorème de HUYGENS

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie G du solide *(S)* dans la base $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point O dans la même base.

Reprenons le cas précédent avec le point A qui coïncide avec le centre d'inertie du solide *(S)*, nous aurons dans le repère $R(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG}$



En remplaçant par les opérateurs d'inertie on obtient : $I_G(S)_{/R_0} = I_O(S)_{/R_0} - J_{OG}(S)_{/R_0}$

En utilisant les relations trouvées précédemment, en changeant le centre du repère en *G*, nous déduisons facilement :

$$I_{Gxx} = I_{Oxx} + m\big((y_G^2 + z_G^2) - 2y_G y_G - 2z_G z_G\big) = I_{Oxx} - m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Gyy} = I_{Oyy} + m\big((x_G^2 + z_A^2) - 2x_G x_G - 2z_G z_G\big) = I_{Oyy} - m(x_G^2 + z_A^2)$$

$$I_{Gzz} = I_{Ozz} + m\big((x_G^2 + y_G^2) - 2x_G x_G - 2y_G y_G\big) = I_{Ozz} - m(x_G^2 + y_G^2)$$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Gxy} = I_{Oxy} - m\big((x_G y_G + y_G x_G - x_G y_G\big) = I_{Oxy} - m x_G y_G$$

$$I_{Gxz} = I_{Oxz} - m\big((x_G z_G + z_G x_G - x_G z_G\big) = I_{Oxz} - m x_G z_G$$

$$I_{Gyz} = I_{Oyz} - m\big((y_G z_G + z_G y_G - y_G z_G\big) = I_{Oyz} - m y_G z_G$$

d'où : $$J_{OG}(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} m(y_G^2 + z_G^2) & -m x_G y_G & -m x_G z_G \\ -m x_G y_G & m(x_G^2 + z_G^2) & -m y_G z_G \\ -m x_G z_G & -m y_G z_G & m(x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_{R_0}$$

Ces expressions permettent de déterminer la matrice d'inertie du solide en O : $I_O(S)_{R_0}$, dans le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en connaissant la matrice d'inertie en G : $I_G(S)_{R_0}$ dans le même repère car elle est plus souvent facile à déterminer.

$$I_O(S)_{R_0} = I_G(S)_{R_0} + J_{OG}(S)_{R_0}$$

Cette expression permet de connaître les six relations de Huygens, qui lient les moments d'inertie et les produits d'inertie en un point O d'un repère et le centre d'inertie *G* du solide dans le même repère.

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2) \qquad I_{Oxy} = I_{Gxy} + m x_G y_G$$

$$I_{Oyy} = I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_A^2) \qquad I_{Oxz} = I_{Gxz} + m x_G z_G$$

$$I_{Ozz} = I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad I_{Oyz} = I_{Gyz} + m y_G z_G$$

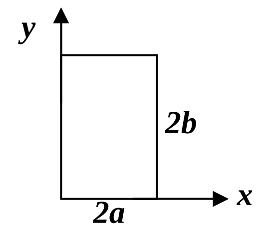
Le théorème de Huygens est très pratique car il permet de déterminer le moment d'inertie d'un solide dans n'importe point O de l'espace centre du repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, en connaissant le moment d'inertie au centre d'inertie G de coordonnées $((x_G, y_G, z_G)$ par rapport au même repère.

Exemple :

Déterminer le moment d'inertie au point O de la plaque mince rectangulaire de masse m, de longueur $2a$ et de largeur $2b$ de centre d'inertie $G\ (a, b, 0)$

On détermine le moment d'inertie de la plaque au point G, puis par le théorème de Huygens, on le déduit au point O.

Les plans (xGz) et (yGz) sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$; la matrice d'inertie en G est diagonale.



Masse de la plaque : $m = \sigma\, 4ab$

Nous avons un solide plan : $z = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$,

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma ds = \sigma \int_S y^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \sigma.2a\frac{2}{3}b^3 = \sigma 4ab\frac{b^2}{3} = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Gxx} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma ds = \sigma \int_S x^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy = \sigma.\frac{2}{3}a^3.2b = \sigma 4ab\frac{a^2}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

La matrice d'inertie au point G s'écrit : $I_G(S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix}$

On déduit par le théorème de Huygens :

$I_{Oxx} = \frac{mb^2}{3} + mb^2 = \frac{4}{3}mb^2$; $I_{Oxy} = 0 + mab$

$I_{Oyy} = \frac{ma^2}{3} + ma^2 = \frac{4}{3}ma^2$; $I_{Oxz} = 0 + ma.0 = 0$

$I_{Oyy} = \frac{m}{3}(a^2+b^2) + m(a^2+b^2) = \frac{4}{3}m(a^2+b^2)$; $I_{Oyz} = 0 + mb.0 = 0$

La matrice d'inertie au point O est égale à : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}mb^2 & -mab & 0 \\ -mab & \frac{4}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

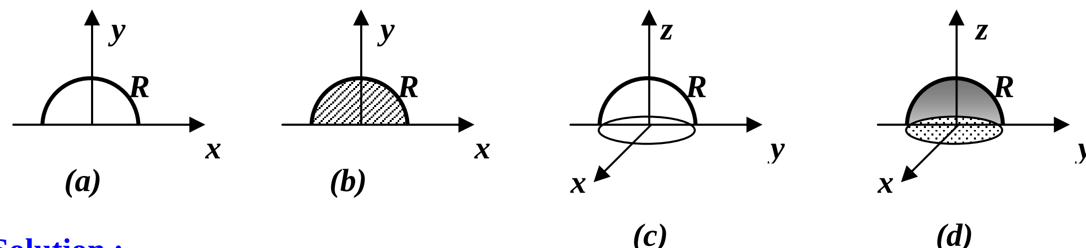
Déterminer le centre d'inertie des corps solides homogènes suivants :

a) Un demi-cercle matériel de rayon ***R*** ;

b) Un demi disque matériel de rayon ***R*** ;

c) Une demi sphère matérielle creuse de rayon ***R*** ;

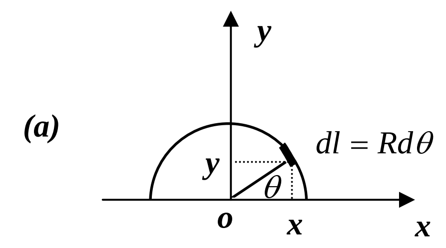
d) Une demi sphère matérielle pleine de rayon ***R*** .



Solution :

a) L'axe *(Oy)* est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $y_G = \dfrac{1}{m}\int\limits_S dm$

Le solide est linéaire ayant la forme d'un demi cercle, sa masse est donnée par :
$m = \int\limits_S \lambda dl$ où : λ est la densité linéaire et *dl* un élément de longueur. L'élément de longueur *dl* a pour coordonnées : $dl\begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{cases}$ avec : $0 \leq \theta \leq \pi$



La masse du solide est donnée par : $m = \int\limits_S \lambda dl = \int\limits_0^{\pi} \lambda R d\theta = \lambda \pi R$

$$y_G = \frac{1}{m}\int\limits_S y dm = \frac{1}{m}\int\limits_S y\lambda dl = \frac{1}{\lambda\pi R}\int\limits_0^{\pi} R\sin\theta R d\theta = \frac{R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{2R}{\pi} \quad ; \quad \text{d'où : } G\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \dfrac{2R}{\pi} \end{cases}$$

b) L'axe *(Oy)* est un axe de symétrie donc : $x_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $y_G = \frac{1}{m}\int_S dm$. Le solide est un demi disque, sa masse est donnée par : $m = \int_S \sigma ds$ où : σ est la densité surfacique et ds un élément de surface. L'élément de surface ds a pour coordonnées : $ds\begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{cases}$ avec : $0 \le \theta \le \pi$

$d = rd\theta\, dr$

(b)

La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \lambda ds = \int_0^{\pi} \lambda r d\theta dr = \lambda \int_0^R r dr \int_0^{\pi} d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

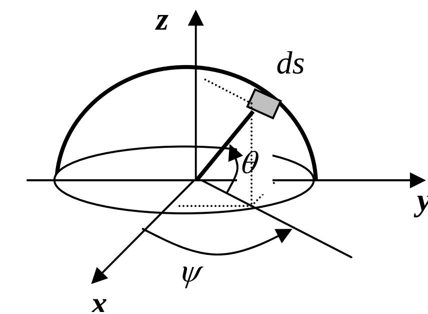
$$y_G = \frac{1}{m}\int_S y dm = \frac{1}{m}\int_S y \sigma ds = \frac{2}{\sigma \pi R^2}\int_0^{\pi} r\sin\theta r d\theta dr = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta r d\theta$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi} \qquad \text{d'où : } G\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \dfrac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

c) Les plans *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie donc : $x_G = y_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie. On a : $z_G = \frac{1}{m}\int_S dm$

Le solide est une demi sphère creuse, sa masse est donnée par :
$m = \int_S \sigma ds$ où : σ est la densité surfacique et ds un élément de surface. L'élément de surface ds est donné par : $ds = Rd\theta R\psi\cos\theta$ et a pour coordonnées : $ds\begin{cases} R\cos\theta\cos\psi \\ R\cos\theta\sin\psi \\ R\sin\theta \end{cases}$

avec : R constant ; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \psi \le 2\pi$



La masse du solide est donnée par : $m = \int_S \sigma ds = \sigma R^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma 2\pi R^2$

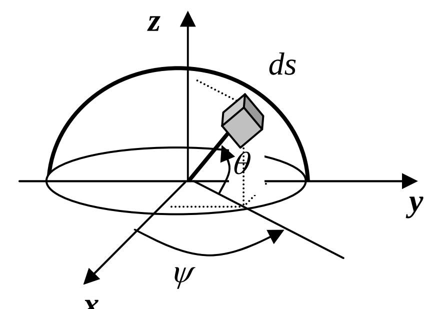
$$z_G = \frac{1}{m}\int_S z dm = \frac{1}{m}\int_S z\sigma ds = \frac{\sigma R^3}{\sigma 2\pi R^2}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{R}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta)\int_0^{2\pi} d\psi$$

$$z_G = \frac{R}{2\pi}\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} .2\pi = \frac{R}{2} \qquad z_G = \frac{R}{2} \quad ; \quad \text{d'où :} \quad G\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = R/2 \end{cases}$$

d) Les plans *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie donc : $x_G = y_G = 0$, le centre de masse du solide est situé sur l'axe de symétrie (Oz). On a alors : $z_G = \frac{1}{m}\int_S dm$

Le solide est une demi sphère pleine, sa masse est donnée par : $m = \int_S \rho dv$ où : ρ est la densité volumique et dv un élément de volume. L'élément de volume dv est donné par : $dv = rd\theta \, rd\psi \, dr \cos\theta$ et a pour coordonnées : $dv\begin{cases} r\cos\theta\cos\psi \\ r\cos\theta\sin\psi \\ r\sin\theta \end{cases}$

avec : $0 \le r \le R$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \psi \le 2\pi$



La masse du solide est donnée par :

$$m = \int_S \rho dv = \rho\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \rho\frac{2}{3}\pi R^3$$

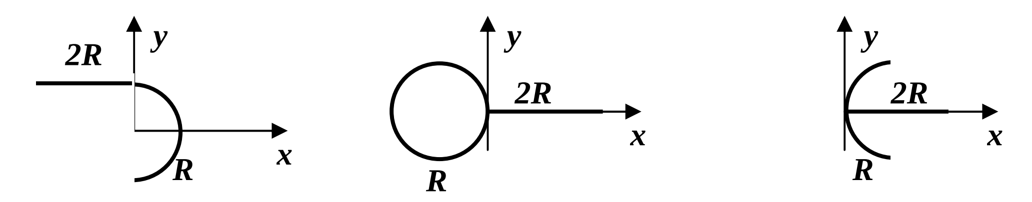
on déduit :

$$z_G = \frac{1}{m}\int_S z dm = \frac{1}{m}\int_S z\rho dv = \frac{\rho}{m}\int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{\rho}{\rho\frac{2\pi R^3}{3}}\frac{R^4}{4}.\frac{\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2}}{2}.2\pi = \frac{3R}{8}$$

$$z_G = \frac{3R}{8} \qquad \text{d'où :} \quad G\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = 3R/8 \end{cases}$$

Exercice 02 :

Déterminer le centre d'inertie des masses linéiques homogènes suivantes :



Exercice 03 :

Déterminer le centre d'inertie de la surface triangulaire homogène suivante.

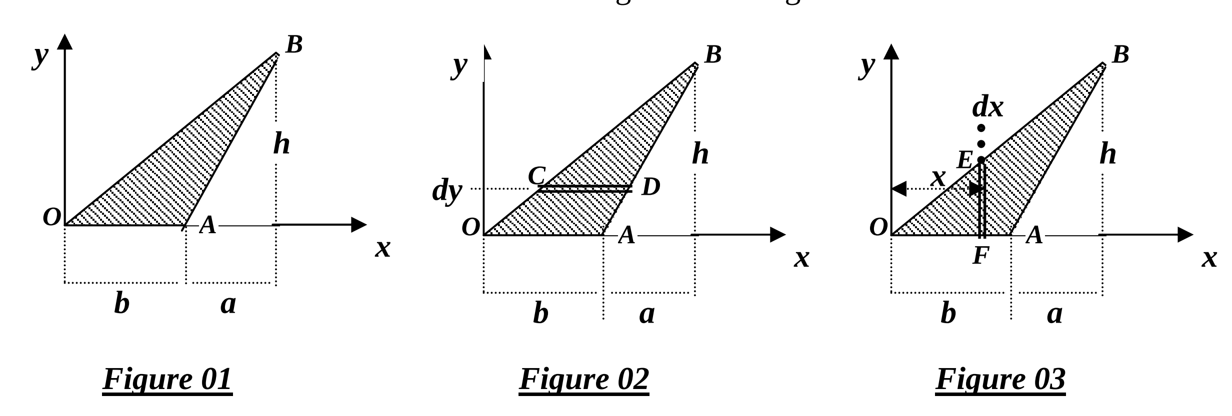


Figure 01 *Figure 02* *Figure 03*

Masse du solide plan : $m = \sigma S = \sigma.\frac{1}{2}b.h$

Calculons $y_G = \frac{1}{m}\int_S ydm = \frac{1}{m}\int_S y\sigma\, ds$ ***(figure 02)***

L'élément de surface est donné par : $ds = L_1 dy$; avec $L_1 = CD$

Dans les triangles semblables OAB et CBD , nous avons : $\frac{CD}{OA} = \frac{h-y}{h} \Leftrightarrow \frac{L_1}{b} = \frac{h-y}{h}$

$L_1 = \frac{b}{h}(h-y)$ ce qui donne : $ds = \frac{b}{h}(h-y)dy$ avec $0 \le y \le h$

$$y_G = \frac{1}{m}\int_S y\sigma ds = \frac{2}{bh}\int_S y\frac{b}{h}(h-y)dy = \frac{2}{h^2}\left(\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{3} \quad ; \qquad y_G = \frac{h}{3}$$

Calculons $x_G = \frac{1}{m}\int_S xdm = \frac{1}{m}\int_S x\sigma\, ds$ ***(figure 03)***

L'élément de surface est donné par : $ds = L_2 dx$; avec $L_2 = EF$ et $0 \le x \le a+b$

Dans les triangles semblables OEF et OBC , nous avons : $\frac{EF}{OF} = \frac{BC}{OC} \Leftrightarrow \frac{L_2}{x} = \frac{h}{a+b}$

$L_2 = \frac{h}{a+b}.x$, ce qui donne : $ds = \frac{h}{a+b}.xdx$

$$x_G = \frac{1}{m}\int_S x\sigma ds = \frac{2}{bh}\int_0^{a+b} x\frac{h}{a+b}xdx = \frac{2}{b(a+b)}\int_0^{a+b} x^2 dx = \frac{2}{3}\frac{(a+b)^2}{b} \quad ; \quad x_G = \frac{2}{3}\frac{(a+b)^2}{b}$$

Exercice 04:

Déterminer, par intégration et par le théorème de Guldin, les coordonnées des centres d'inertie des corps surfaciques homogènes suivants :

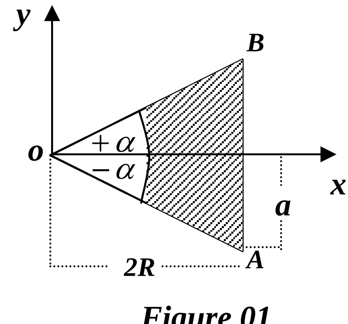


Figure 01

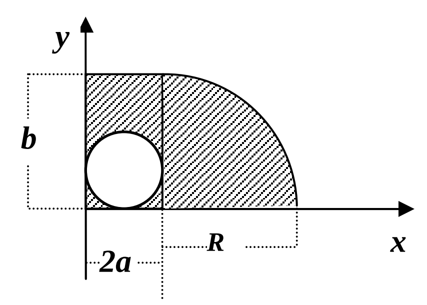


Figure 02

Solution :

figure 01 :

Centre d'inertie par intégration :

Par raison de symétrie, le centre d'inertie est sur l'axe ***(Ox)*** , alors $y_G = 0$

On calcule d'abord le centre d'inertie du triangle puis celui de la portion de disque, ensuite on déduit le centre d'inertie du solide.

a) Centre d'inertie du triangle :

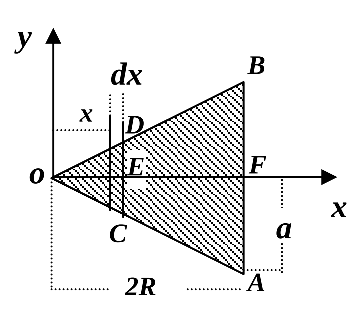
masse du triangle : $m_1 = \sigma S_1 = \sigma \frac{2a.2R}{2} = 2aR$;

on choisit un élément de surface :

$ds_1 = CD.dx = L_1.dx$; avec : $0 \leq x \leq 2R$.

Les triangles ***OED*** et ***OFB*** sont senblables ;

Nous pouvons écrire : $\frac{OE}{OF} = \frac{ED}{FB} \Leftrightarrow \frac{x}{2R} = \frac{L_1/2}{a} \Rightarrow L_1 = \frac{a}{R}x$

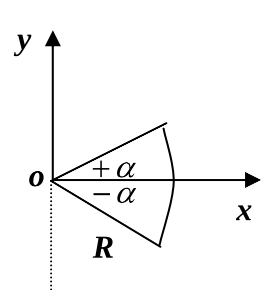


$$x_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_s x dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_s x\sigma ds_1 = \frac{1}{\sigma 2aR}\int_0^{2R} x\sigma\frac{a}{R}xdx = \frac{1}{2R^2}\int_0^{2R} x^2 dx = \frac{4R}{3}$$

b) Centre d'inertie de la portion de disque :

Masse de la portion de disque :

$$m_2 = \int_s \sigma ds_2 = \sigma\int_0^R rdr\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \sigma.\alpha R^2$$



on choisit un élément de surfe $ds_2 = rd\theta.dr$

de coordonnées : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

avec : $-\alpha \le \theta \le +\alpha$ et $0 \le r \le R$

On déduit alors : $x_{2G} = \frac{1}{m_2}\int_{s_2} x dm_2 = \frac{1}{m_2}\int_s x\sigma ds_2 = \frac{1}{\sigma\alpha R^2}\int_0^R x\sigma r dr.d\theta$

$$x_{2G} = \frac{1}{\alpha R^2}\int_0^R r^2 dr\int_{-\alpha 0}^{+\alpha}\cos\theta d\theta = \frac{1}{\alpha R^2}.\frac{R^3}{3}.2\sin\alpha = \frac{2R}{3}.\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad ; \quad x_{2G} = \frac{2R}{3}.\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Centre d'inertie du solide :

$$x_G = \frac{x_{1G}.m_1 - x_{2G}.m_2}{m_1 - m_2} = \frac{x_{1G}.s_1 - x_{2G}.s_2}{s_1 - s_2}$$

$$x_G = \frac{\frac{4R}{3}.2aR - \frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}.\alpha R^2}{2aR - \alpha R^2} = \frac{2R}{3}.\frac{4a - R\sin\alpha}{2a - \alpha R}$$

Centre d'inertie du solide par le théorème de Guldin :

La rotation se fait autour de l'axe *Oy*

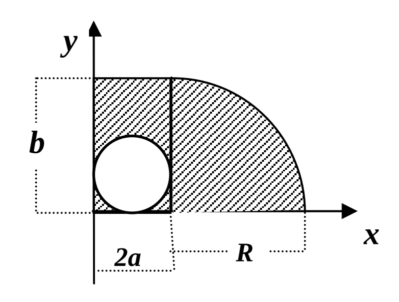
$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi.S_{tot}} = \frac{(2aR).2\pi.\frac{4R}{3} - (\alpha R^2).2\pi.\frac{2R}{3}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}{2\pi.(2aR - \alpha R^2)} = \frac{2R}{3}.\frac{4a - R\sin\alpha}{2a - \alpha R}$$

figure 02 :

Centre d'inertie par intégration :

On calcul le centre d'inertie des trois solides ***(rectangle, quart de disque, disque)*** séparément puis on déduit le centre d'inertie du solide entier.

a) Centre d'inertie du rectangle :



Masse du rectangle : $dm_1 = \sigma ds_1 = \sigma dxdy$

Avec $0 \le x \le 2a$; $0 \le y \le b$; $m_1 = \sigma 2a.b$

$$x_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} x dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} x\sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab}\int_0^{2a} xdx \int_0^b dy = a$$

$$y_{1G} = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} y dm_1 = \frac{1}{m_1}\int_{S_1} y\sigma ds_1 = \frac{\sigma}{\sigma 2ab}\int_0^{2a} dx \int_0^b ydy = \frac{b}{2}$$

b) Centre d'inertie du quart de disque :

On fait une translation de repère de ***2a*** suivant l'axe (Ox) puis on calcule les coordonnés du centre de masse du quart de disque. On choisit un élément de surface :

$dm_2 = \sigma ds_2 = \sigma\, rd\theta.dr$ avec : $0 \le r \le R$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; d'où $m_2 = \sigma\frac{\pi R^2}{4}$

Les coordonnées du centre de masse seront données par :

$$x_{2G} = 2a + \frac{1}{m_2}\int_{S_1} x dm_2 = 2a + \frac{1}{m_2}\int_{S_1} x\sigma ds_2 = 2a + \frac{\sigma}{\sigma\frac{\pi R^2}{4}}\int_0^{2r} r^2 dr \int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 2a + \frac{4R}{3\pi}$$

$$y_{2G} = \frac{1}{m_2}\int_{S_1} y dm_2 = \frac{1}{m_2}\int_{S_1} y\sigma ds_2 = \frac{\sigma}{\sigma\frac{\pi R^2}{4}}\int_0^{2r} r^2 dr \int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}$$

c) Centre d'inertie du disque :

Masse du disque : $m_3 = \sigma.\pi a^2$

Les coordonnées du centre de masse sont : $x_{3G} = a$ et $y_{3G} = a$

Le solide est homogène, alors le centre d'inertie des masses est le même que le centre d'inertie des surfaces. Les coordonnées du centre d'inertie du solide qui est un système composé seront données par les relations suivantes :

*<u>Sur l'axe des **x** :</u>* $$x_G = \frac{x_{1G}.m_1 + x_{2G}.m_2 - x_{3G}.m_3}{m_1 + m_2 - m_2 +} = \frac{x_{1G}.s_1 + x_{2G}.s_2 - x_{3G}.s_3}{s_1 + s_2 - s_2 +}$$

d'où : $$x_G = \frac{\frac{a}{2}.ab + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - a.\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{a^2 b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

de même sur l'axe des ***y***

$$y_G = \frac{y_{1G}.m_1 + y_{2G}.m_2 - y_{3G}.m_3}{m_1 + m_2 - m_2 +} = \frac{y_{1G}.s_1 + y_{2G}.s_2 - y_{3G}.s_3}{s_1 + s_2 - s_2 +}$$

d'où :

$$y_G = \frac{\frac{b}{2}.ab + \frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi R^2}{4} - a.\pi a^2}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

Les coordonnées du centre d'inertie du solide composé sont :

$$G\left(\frac{\frac{a^2 b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} \quad , \quad \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2} \right)$$

d) Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide composé.

La rotation par rapport à l'axe ***y*** *donne la coordonnée* x_G *:*

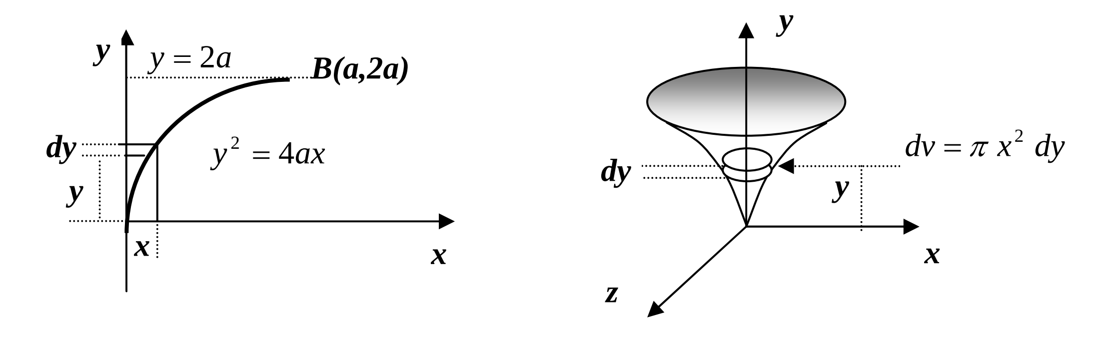
$$x_G = \frac{V_{tot} / y}{2\pi.S_{tot}} \quad ; \quad x_G = \frac{\pi a^2 b + 2\pi\left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2.2\pi a}{2\pi\left(ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2\right)} = \frac{\frac{a^2 b}{2} + \left(a + \frac{4R}{3\pi}\right).\frac{\pi R^2}{4} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

La rotation par rapport à l'axe ***x*** *donne la coordonnée* y_G *:*

$$y_G = \frac{V_{tot} / x}{2\pi.S_{tot}} \quad ; \quad y_G = \frac{\pi b^2.a + \frac{1}{2}.\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) - \pi a^2.2\pi a}{2\pi\left(ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2\right)} = \frac{\frac{ab^2}{2} + \frac{R^3}{3} - \pi a^3}{ab + \frac{\pi R^2}{4} - \pi a^2}$$

Exercice 05:

En faisant tourner la surface limitée par l'axe ***oy,*** la courbe parabolique d'équation $y^2 = 4ax$ et la droite d'équation $y = 2a$, nous obtenons un volume, comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer le centre d'inertie de ce volume.



Solution :

Nous avons $y^2 = 4ax \Rightarrow x = \dfrac{y^2}{4a}$ pour : $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = a \Rightarrow y = 2a \end{cases}$

La rotation de cette surface par rapport à l'axe des ***y*** donne un solide de révolution d'axe ***y***.

Par raison de symétrie, le centre de masse sera sur l'axe ***Oy***, alors : $x_G = 0$ et $y_G = 0$

A un hauteur y , on choisi un élément de volume (couronne) ***dv*** ayant une surface circulaire égale à πx^2 et d'épaisseur ***dy*** tel que : $dv = \pi x^2 dy$ avec $0 \le y \le 2a$

Le volume total décrit par la rotation de cette surface est égal à :

$$V = \int_0^{2a} \pi x^2 dy = \int_0^{2a} \pi\left(\frac{y^4}{16a^2}\right)dy = \frac{\pi}{16a^2}\cdot\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2a} = \frac{2}{5}\pi a^3$$

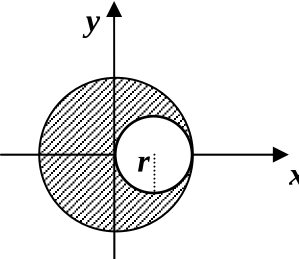
La coordonnée du centre de masse du volume suivant l'axe ***Oy*** est donnée par :

$$y_G = \frac{1}{m}\int_S y dm = \frac{1}{\rho V}\int_S y\rho dv = \frac{1}{V}\int_0^{2a} y.\pi x^2.dy = \frac{1}{V}\int_0^{2a} y.\pi\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2.dy$$

$$y_G = \frac{\pi}{16a^2 V}\int_0^{2a} y^5.dy = \frac{\pi}{16a^2.\frac{2}{5}\pi a^3}\left[\frac{y^6}{6}\right]_0^{2a} = \frac{5}{3}a$$

Exercice 06:

Déterminer le centre d'inertie du disque homogène après avoir percé un trou de rayon ***r*** , comme indiqué sur la figure.



Exercice 07:

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie, par le théorème de Guldin, des solides homogènes suivants :

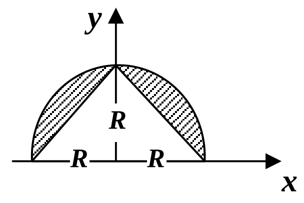


Figure 01

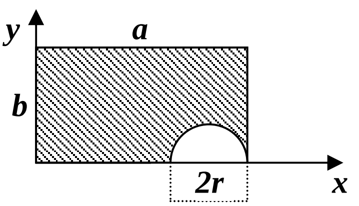


Figure 02

Solution :

a) figure 01 :

Le solide est constitué d'un demi disque évidé d'un triangle isocèle dont la base est le diamètre du disque et la hauteur le rayon du disque.

Par raison de symétrie le solide a son centre d'inertie sur l'axe des ***y*** , d'où : $x_G = 0$

$$y_G = \frac{V_{tot} / x}{2\pi.S_{tot}} = \frac{Vol(sphère) - Vol(2cônes)}{2\pi.(S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - 2.\frac{1}{3}\pi R^3}{2\pi.(\frac{\pi R^2}{2} - R^2)} = \frac{2}{3}.\frac{R}{\pi - 2}$$

b) figure 02 :

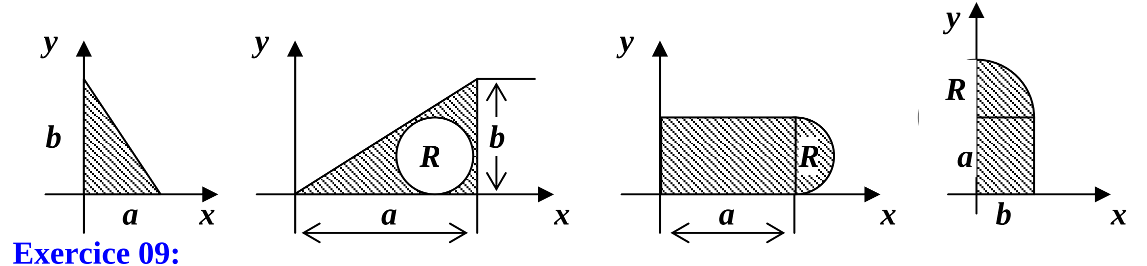
Le solide est constitué d'une plaque rectangulaire évidée d'un demi disque.

$$x_G = \frac{V_{tot} / y}{2\pi.S_{tot}} = \frac{Vol_{(cylindre)} - Vol_{(demi-torre)}}{2\pi.(S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\pi a^2.b - \frac{1}{2}\pi r^2.2\pi(a-r)}{2\pi.(ab - \frac{\pi r^2}{2})} = \frac{a^2 b - \pi r^2 (a-r)}{2ab - \pi r^2}$$

$$y_G = \frac{V_{tot} / x}{2\pi.S_{tot}} = \frac{Vol_{(cylindre)} - Vol_{(sphère)}}{2\pi.(S_{disque} - S_{triangle})} = \frac{\pi b^2.a - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi.(ab - \frac{\pi r^2}{2})} = \frac{3ab^2 - 4r^3)}{3(2ab - \pi r^2}$$

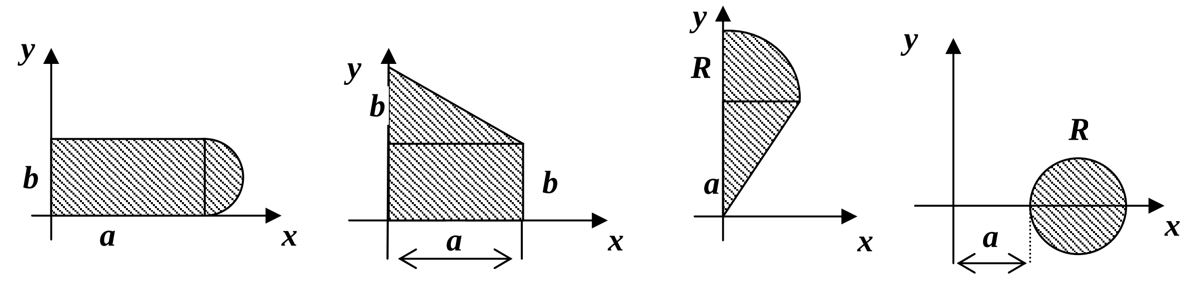
Exercice 08:

Déterminer par le théorème de Guldin le centre d'inertie des solides homogènes suivants :



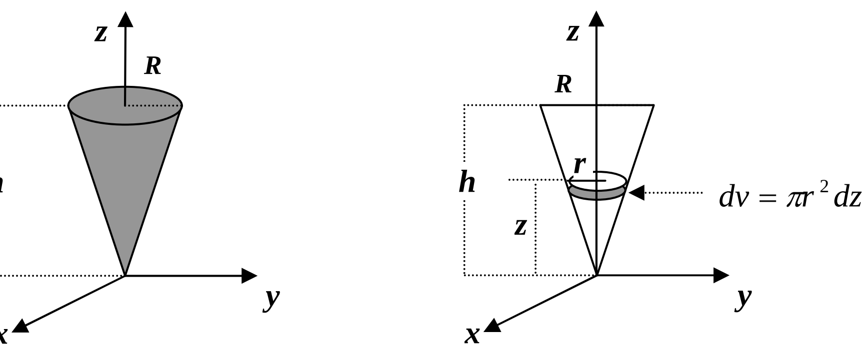
Exercice 09:

Calculer les volumes engendrés par la rotation des surfaces ci-dessous autour de l'axe y ?



Exercice 10:

Déterminer le centre d'inertie d'un cône de hauteur $\boldsymbol{h}$ et de rayon de base $\boldsymbol{R}$ par rapport à son sommet.



Par raison de symétrie le centre d'inertie du cône est situé sur l'axe $\boldsymbol{Oz}$. On choisit un élément de volume : $dv = \pi r^2 dz$ et situé à une hauteur $\boldsymbol{z}$ tel que : $\dfrac{r}{z} = \dfrac{R}{h} \Rightarrow \quad r = \dfrac{R}{h} z$

Le centre d'inertie est donné par : $z_G = \dfrac{1}{m}\int_S z dm$ avec : $0 \le z \le h$

Calculons d'abord la masse du cône. Nous avons : $dm = \rho dv$

$$m = \rho \int_S dv = \rho \int_S \pi r^2 dz = \rho\pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} z^2 dz = \rho\pi \frac{R^2}{h^2} . \frac{h^3}{3} = \rho \frac{1}{3} \pi R^2 . h$$

d'où : $z_G = \dfrac{1}{m}\int_S z dm = \dfrac{1}{m}\int_0^h z\rho\pi r^2 dz = \dfrac{3}{\rho\pi R^2 h}\int_0^h z\rho\pi\left(\dfrac{R^2}{h^2} z^2\right) dz = \dfrac{3}{h^3}\int_0^h z^3 dz = \dfrac{3}{4} h$

Exercice 11 :

Déterminer les tenseurs d'inertie en ***O*** relativement au repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ des solides homogènes **(S)** suivants :

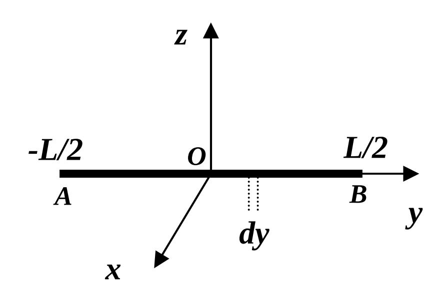
1. **(S)** est une barre ***AB*** de longueur ***L***, de milieu ***O***, portée par l'axe ***Oy*** ;
2. **(S)** est un cercle de centre ***O***, de rayon ***R***, d'axe ***Oz*** ;
3. **(S)** est un disque de centre ***O***, de rayon ***R***, d'axe ***Oz*** ;
4. **(S)** est une sphère creuse de centre ***O***, de rayon ***R*** ;
5. **(S)** est une sphère pleine de centre ***O***, de rayon ***R*** ;
6. **(S)** est une plaque rectangulaire de dimension ***a*** x ***b*** de centre de gravité ***O***, l'axe ***Oz*** est perpendiculaire à la plaque ;
7. **(S)** est un parallélépipède plein de dimension ***2a*** x ***2b*** x ***2c*** et le centre du repère est en ***O*** milieu du côté ***2a*** .

Solution :

1. Le solide est une barre de longueur L

Nous avons un solide linéaire ***AB = L*** de masse m et de densité linéaire λ tel que :

$$m = \int_S dm = \int_S \lambda dy = \lambda.L \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m}{L}$$



On choisit un élément de longueur *dy* ayant pour coordonnées : *(0, y, 0)* tel que : $-L \leq y \leq +L$

Les moments d'inertie sont données par :

$$I_{xx} = \int_S (y^2 + z^2)dm \ ; \ I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2)dm \ ; \ I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2)dm$$

Les produits d'inertie sont données par : $I_{xy} = \int_S xydm \quad ; \quad I_{xz} = \int_S xzdm \quad ; I_{yz} = \int_S yzdm$

On remarque que les axes *Ox* et *Oz* jouent le même rôle vis à vis du solide, alors : $I_{xx} = I_{zz}$

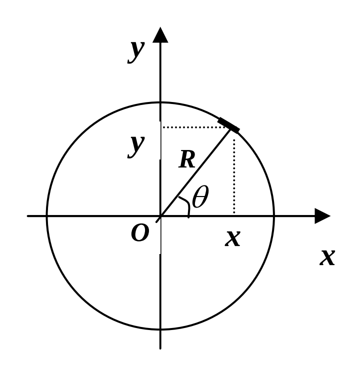
L'élément de longueur choisi a pour coordonnées *x = 0* et *z = 0* alors $I_{yy} = 0$ et tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

$$I_{xx} = \int_S y^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = \lambda \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

$$I_{xx} = \int_S y^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 \lambda dy = \lambda \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda L^3}{12} = \frac{mL^2}{12}$$

Le tenseur d'inertie de la barre au point ***O*** est : $I_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$

2. Le solide est un cercle de rayon *R* de centre *O* et d'axe *Oz*



Le périmètre du cercle est égal à : $L = 2\pi R$

La masse du solide est donnée par : $m = \lambda L = \lambda.2\pi R$

Les plans *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On voit aussi que les axes *Ox* et *Oy* jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux : $I_{xx} = I_{yy}$

Nous avons un solide dans le plan *(xOy)*, alors quel que soit l'élément de masse *dm* choisi il aura pour coordonnées : *(x, y, 0)* , et nous avons aussi dans le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S R^2 dm = mR^2$$

$I_{xx} = \int_S y^2 dm$ et $I_{yy} = \int_S x^2 dm$, en faisant la somme des deux moments d'inertie nous obtenons : $I_{xx} + I_{yy} = \int_S (x^2 + y^2) dm = I_{zz}$, or nous avons l'égalité : $I_{xx} = I_{yy}$

alors : $2I_{xx} = I_{zz} \Rightarrow I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2}$ alors : $I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{2}$

Dans un solide plan, le moment d'inertie suivant l'axe perpendiculaire au plan est égale à la somme des moments suivant les deux axes du plan.

Le tenseur d'inertie d'un cercle en ***O*** est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}$

Nous pouvons aussi calculer les moments d'inerties I_{xx} et I_{yy} autrement :

On choisi un élément de longueur $dl = Rd\theta$ ayant pour coordonnées ($R\cos\theta, R\sin\theta, 0$)

Nous aurons ainsi : $I_{xx} = \int_S y^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\theta d\theta = \lambda.\pi R^3$

Or nous avons : $m = \lambda.2\pi R \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m}{2\pi R}$ en remplaçant λ dans l'expression de I_{xx} , on obtient : $I_{xx} = \frac{mR^2}{2}$. On obtient I_{yy} de la même manière.

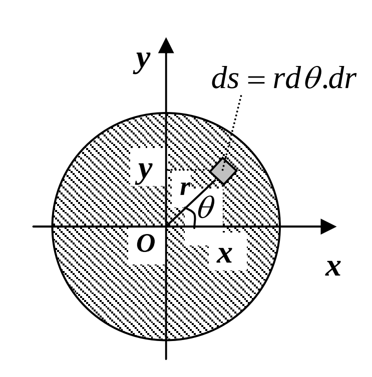
3. Le solide est cercle de rayon *R* de centre *O* et d'axe *Oz*

La surface du disque est : $S = \pi R^2$

La masse du solide est donnée par : $m = \sigma R = \sigma.\pi R^2$

Les plans *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On voit aussi que les axes *Ox* et *Oy* jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux : $I_{xx} = I_{yy}$



Nous avons un solide dans le plan *(xOy)*, on choisi un élément de masse $dm = \sigma ds = \sigma r d\theta.dr$ tel que : $0 \le r \le R$ et $0 \le \theta \le 2\pi$

Les coordonnées de cet élément sont : $dm \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}$, et nous avons aussi : $x^2 + y^2 = r^2$

$$I_{zz} = \int_S (x^2+y^2)dm = \int_S r^2 \sigma r d\theta . dr = \sigma \int_0^R r^3 dr . \int_0^{2\pi} d\theta = \sigma . \frac{R^4}{4} . 2\pi = \sigma\pi R^2 . \frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

$I_{xx} = \int_S y^2 dm$ et $I_{yy} = \int_S x^2 dm$, en faisant la somme des deux moments d'inertie nous

obtenons : $I_{xx} + I_{yy} = \int_S (x^2+y^2)dm = I_{zz}$, or nous avons l'égalité : $I_{xx} = I_{yy}$

alors : $2I_{xx} = I_{zz} \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2}$ alors : $I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$

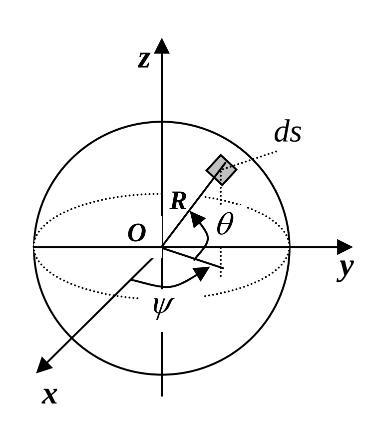
Dans un solide plan, le moment d'inertie suivant l'axe perpendiculaire au plan est égale à la somme des moments suivant les deux axes du plan.

Le tenseur d'inertie d'un disque en ***O*** est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}$

4. Le solide est une sphère creuse de rayon *R* de centre *O* .

L'élément de surface ***ds*** est repéré par les coordonnées sphériques : (R, θ, ψ) tel que :

$$ds \begin{cases} R\cos\theta\cos\psi \\ R\cos\theta\sin\psi \\ R\sin\theta \end{cases}$$



Avec : $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le \psi \le 2\pi$

Nous avons alors : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

La surface de l'élément choisi est donnée par :

$ds = Rd\theta . Rd\psi . \cos\theta = R^2 \cos\theta d\theta . d\psi$

Masse de la sphère creuse : $m = \int_S \sigma ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma R^2 \cos\theta d\theta . \int_0^{2\pi} d\psi = \sigma .4\pi R^2$

Les plans *(xOy), (xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On voit aussi que les axes Ox, Oy et Oz jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux : $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_S (y^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$3I_{xx} = 2\int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2\int_S R^2 dm = 2mR^2$$

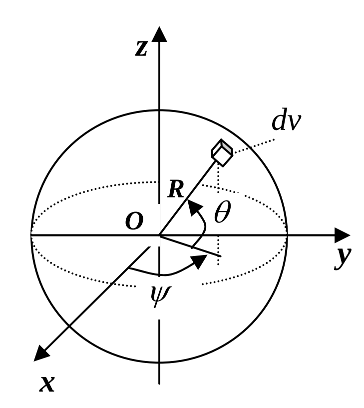
d'où : $I_{xx} = \frac{2}{3} mR^2$

Le tenseur d'inertie en ***O*** d'une sphère creuse est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{bmatrix}$

5. Le solide est une sphère pleine de rayon *R* de centre *O* .

L'élément de volume ***dv*** est repéré par les coordonnées sphériques : (r, θ, ψ) tel que :

$$dv \begin{cases} r\cos\theta\cos\psi \\ r\cos\theta\sin\psi \\ r\sin\theta \end{cases}$$



Avec : $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et $0 \le \psi \le 2\pi$, $0 \le r \le R$

Nous avons alors : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Le volume de l'élément choisi est donnée par :

$$dv = rd\theta . rd\psi . dr\cos\theta = r^2 \cos\theta d\theta . d\psi . dr$$

Masse de la sphère pleine : $m = \int_S \rho\, dv = \int_S \rho\, r^2 \cos\theta d\theta . d\psi . dr = \rho \int_0^R r^2 dr . \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta . \int_0^{2\pi} d\psi$

$$m = \rho . \frac{4}{3} . \pi R^3$$

Les plans *(xOy)*, *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$. On voit aussi que les axes Ox, Oy et Oz jouent le même rôle par rapport au solide alors les moments d'inertie suivant ces axes sont égaux : $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$, nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_S (y^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + z^2) dm + \int_S (x^2 + y^2) dm$$

$$3 I_{xx} = 2 \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int_S r^2 dm = 2\rho \int_0^R r^4 dr . \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta . \int_0^{2\pi} d\psi = 2\rho . \frac{R^5}{5} 4\pi$$

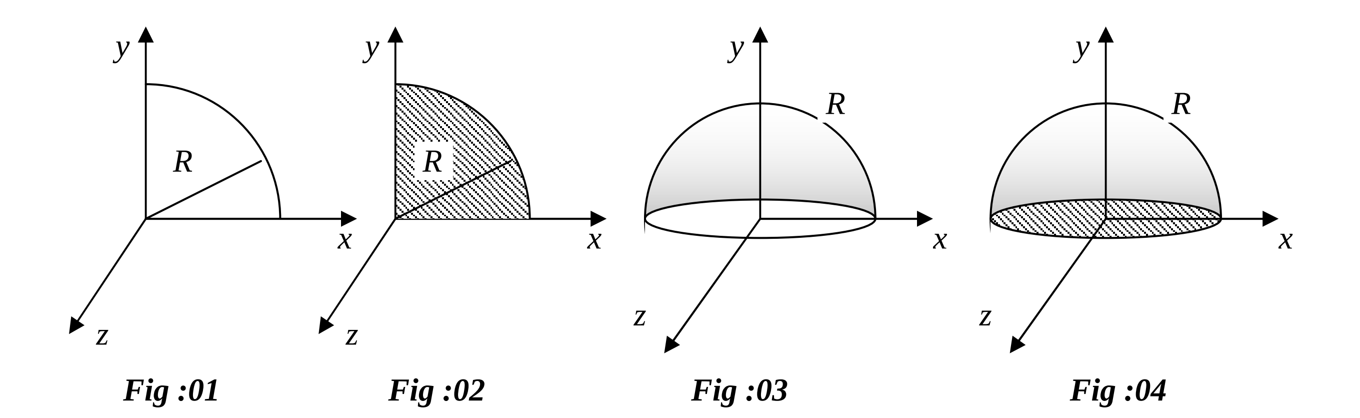
d'où : $3 I_{xx} = \frac{2R^2}{5} \rho . 4\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \frac{2R^2}{5} \rho . \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{5} m R^2$

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m R^2$$

Le tenseur d'inertie en ***O*** d'une sphère pleine est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} mR^2 \end{bmatrix}$

Exercice 12 :

Déterminer les tenseurs d'inertie en ***O*** relativement au repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ des solides homogènes **(S)** suivants : quart de cercle, quart de disque, demi-sphère creuse, demi-sphère pleine.



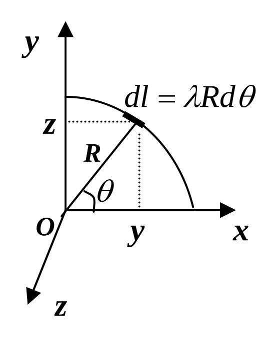
a) Calculer pour chacun des solides le moment d'inertie par rapport à la droite (Δ) passant par le point ***O*** et le point ***A*** de coordonnées *(R, R, 0)* ;

b) Déterminer les axes principaux d'inertie pour chaque solide.

Solution :

fig : 01 Le solide est linéaire de longueur : $L = \dfrac{\pi R}{2}$ donc de masse : $m = \lambda \dfrac{\pi R}{2}$

On considère un élément de longueur : $dl = \lambda R d\theta$



avec : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$, de coordonnées $(0, R\cos\theta, R\sin\theta)$

Les axes ***Oy*** et ***Oz*** jouent le même rôle alors : $I_{yy} = I_{zz}$

Nous avons un solide dans le plan *(xOy)*, alors quel que soit l'élément de masse *dm* choisi il aura pour coordonnées : *(x, y, 0)* et nous avons aussi dans le cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2)dm = \int_S R^2 dm = mR^2$$

$I_{xx} = \int_S y^2 dm$ et $I_{yy} = \int_S x^2 dm$, en faisant la somme des deux moments d'inertie nous obtenons : $I_{xx} + I_{yy} = \int_S (x^2 + y^2)dm = I_{zz}$, or nous avons l'égalité : $I_{xx} = I_{yy}$

alors : $2I_{xx} = I_{zz} \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \dfrac{I_{zz}}{2}$ alors : $I_{xx} = I_{yy} = \dfrac{mR^2}{2}$

Calcul du produit d'inertie $I_{xy} = \int_S xydm$

$$I_{xy} = \int_S xydm = \int_0^{\pi/2} R\cos\theta . R\sin\theta . \lambda R d\theta = \lambda R^3 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta) = \lambda \frac{R^3}{2} = \frac{2m}{\pi R} . \frac{R^3}{2} = \frac{mR^2}{\pi}$$

Le tenseur d'inertie du quart de cercle en ***O*** est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \dfrac{mR^2}{2} & -\dfrac{mR^2}{\pi} & 0 \\ -\dfrac{mR^2}{\pi} & \dfrac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix}$

2) Moment d'inertie I_Δ par rapport à la droite (Δ) passant par *O(0,0,0)* et *A(R, R, 0)*

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par cette droite , il s'écrit :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{R\,\vec{i} + R\,\vec{j}}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

Le moment d'inertie par rapport à la droite (Δ) est défini par :

$$I_\Delta = \vec{u}^T . I_O(S) . \vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} \dfrac{mR^2}{2} & -\dfrac{mR^2}{\pi} & 0 \\ -\dfrac{mR^2}{\pi} & \dfrac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_\Delta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (1,1,0) \begin{bmatrix} A & -C & 0 \\ -C & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A - C, \quad -C + A, \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(A - C - C + A) = A - C$$

$$I_\Delta = \frac{mR^2}{2} - \frac{mR^2}{\pi}$$

3) Calcul des moments principaux d'inertie.

Si I_1 , I_2 , I_3 sont les moments principaux d'inertie , ils sont solution du déterminant :

$$\begin{vmatrix} A-I & -C & 0 \\ -C & A-I & 0 \\ 0 & 0 & B-I \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (B-I)\left[(A-I)^2 - C^2\right] = 0$$

$$(B-I)(A-I-C)(A-I+C) = 0$$

on déduit alors : $I_1 = B \quad \Rightarrow \quad I_1 = mR^2$

$$I_2 = A + C \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{mR^2}{2} + \frac{mR^2}{\pi}$$

$$I_3 = A - C \quad \Rightarrow \quad I_3 = \frac{mR^2}{2} - \frac{mR^2}{\pi}$$

4) Détermination des axes principaux d'inertie

a) Axes principaux

Soit $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire porté par cet axe principale tel que $\vec{e}_1 = \begin{cases} l \\ m \\ n \end{cases}$ où (l, m, n) sont les cosinus directeur alors nous avons : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ et nous avons aussi :

$$\begin{bmatrix} A-I_1 & -C & 0 \\ -C & A-I_1 & 0 \\ 0 & 0 & B-I_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (A-I_1).l - C.m = 0 & (1) \\ -C.l + (A-I_1).m = 0 & (2) \\ (B-I_1).n = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) nous donne : $n = 0$

En résolvant ce système d'équation nous obtenons les valeurs des cosinus directeurs.

Multiplions l'équation *(1)* par *n* et l'équation *(2)* par *m* et faisant la différence :

$$(A-I_1).l^2 - C.ml = 0$$

$$-C.lm + (A-I_1).m^2 = 0$$

$$(A-I_1).l^2 - (A-I_1)m^2 = 0 \qquad (A-I_1)(l^2 - m^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l^2 = m^2 \quad \Rightarrow l = \pm\ m$$

nous avons ainsi : $l^2 + m^2 + n^2 = 1 \iff l^2 + l^2 + 0 = 1 \Rightarrow 2l^2 = 1 \Rightarrow l = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

dons $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous avons donc l'axe principal passant par O et de vecteur unitaire :

$\vec{e}_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$; $\vec{e}_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et (0,0,1)

De la même manière si on utilise les moments I_2 et I_3 on retrouve les mêmes axes qui sont : $\vec{e}_1(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$; $\vec{e}_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$; (0,0,1)

Pour les solides restant leurs tenseurs d'inertie ont déjà été calculés précédemment. On procède de la même manière et on retrouve facilement les moments principaux ainsi que les axes principaux d'inertie.

Exercice 13 :

Déterminer les tenseurs d'inertie en ***O*** relativement au repère orthonormé $R(O, x, y, z)$ des solides linéaires et homogènes **(S)** suivants :

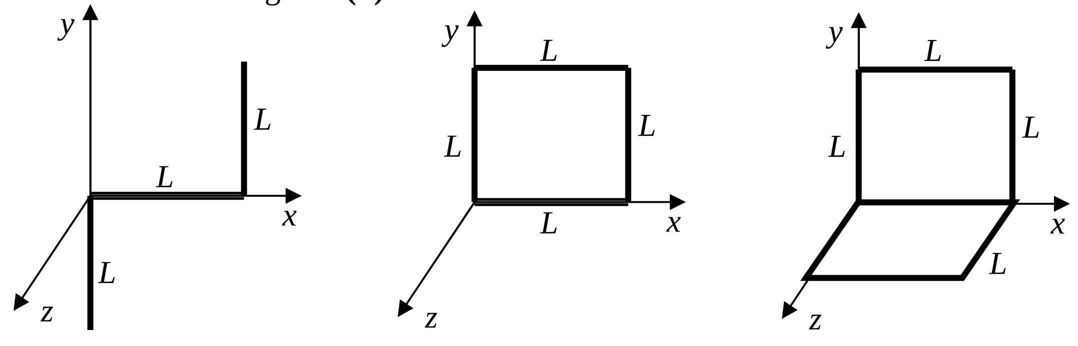


Figure :01 ***Figure :02*** ***Figure :03***

Solution :

Figure :01

Le solide de la figure :01 est composé de trois barres S_1 , S_2 , S_3 . Le moment d'inertie du solide au point ***O*** est égal à la somme des moments d'inertie de chacune des barres au même point ***O***.

$$I(S)_O = I(S_1)_O + I(S_2)_O + I(S_3)_O$$

$$I(S_1)_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} ; \; I(S_2)_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

Figure :01

Pour la barre $\boldsymbol{S_3}$, nous utiliserons le théorème de Huygens. On détermine le moment d'inertie au centre d'inertie $\boldsymbol{G_3}$ de la barre puis on le ramène au point $\boldsymbol{O}$ par le théorème de Huygens. nous avons $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x_G = L \\ y_G = L/2 \\ z_G = 0 \end{cases}$

Le moment d'inertie de la barre $\boldsymbol{S_3}$ en $\boldsymbol{G_3}$ est données par : $I(S_3)_{G3} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$

Nous avons par le théorème de Huygens :

$$I_{xx}(S_3)_O = I_{xx}(S_3)_{G3} + m(y_G^2 + z_G^2) = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

$$I_{yy}(S_3)_O = I_{yy}(S_3)_{G3} + m(x_G^2 + z_G^2) = 0 + mL^2 = mL^2$$

$$I_{zz}(S_3)_O = I_{zz}(S_3)_{G3} + m(x_G^2 + y_G^2) = \frac{mL^2}{12} + m\left(L^2 + \frac{L^2}{4}\right) = \frac{4}{3}mL^2$$

$$I_{xy}(S_3)_O = I_{xy}(S_3)_{G3} + mx_G y_G = 0 + mL.\frac{L}{2} = \frac{mL^2}{2}$$

$$I_{xz}(S_3)_O = I_{xz}(S_3)_{G3} + mx_G z_G = 0$$

$$I_{yz}(S_3)_O = I_{yz}(S_3)_{G3} + my_G z_G = 0$$

d'où le tenseur d'inertie de la barre S_3 au point O : $I(S_3)_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & -mL^2/2 & 0 \\ -mL^2/2 & mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}$

Le tenseur d'inertie du solide au point O est égal à :

$$I(S)_O = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & -mL^2/2 & 0 \\ -mL^2/2 & mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}mL^2 \end{bmatrix}$$

$$I(S)_O = \begin{bmatrix} \frac{2mL^2}{3} & -mL^2/2 & 0 \\ -mL^2/2 & \frac{4mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2mL^2 \end{bmatrix}$$

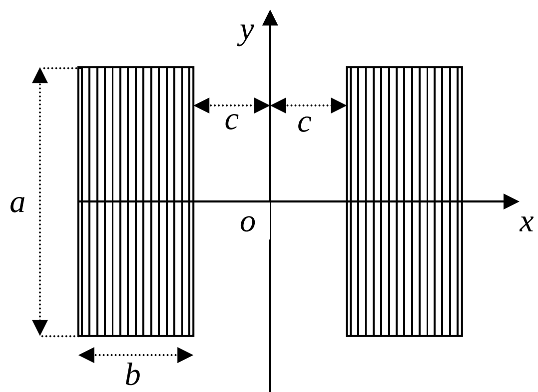
Pour le solide de la figure **(2)** utiliser la même technique de résolution. Le tenseur d'inertie du solide de la figure **(3)** se déduit à partir de celui de la figure **(2)**.

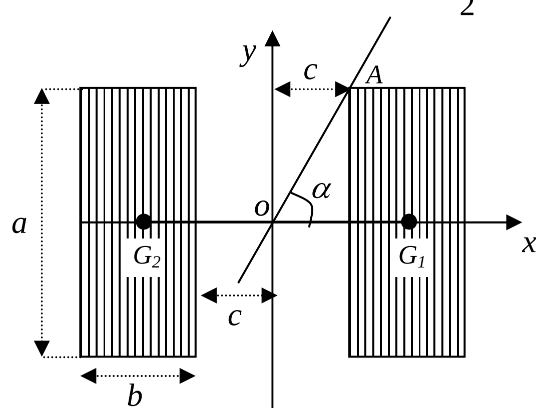
Exercice 14 :

Les deux panneaux solaires d'un satellite sont de forme rectangulaire, montés tel que représenté sur la figure ci-dessous. Afin de maîtriser les différentes rotations du satellite, il est demandé de déterminer :

a) Le tenseur d'inertie du système en $\boldsymbol{O}$ relativement à $R(O,x,y,z)$;

b) Le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le point $\boldsymbol{O}$ et le point $A(c,\frac{a}{2},0)$





Solution :

a) Tenseur d'inertie du système au point O dans $R(O, x, y, z)$

Le système est formé de deux panneaux rectangulaires identiques ***S₁*** et ***S2*** de masse : $m = \sigma.ab$ et de centres de gravité respectifs : ***G₁*** et ***G₂*** .

On calcul les tenseurs d'inertie en ces centres d'inertie puis, par le théorème de Huygens, on déduit les tenseurs d'inertie au point O dans le repère $R(O, x, y, z)$.

Les plans *(xOz)* et *(yOz)* sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{Oxz} = I_{Oyz} = I_{Oxz} = 0$ Nous avons un solide plan : *z = 0* alors $I_{Oxz} = I_{Oyz} = 0$ et aussi : $I_{Oxx} + I_{Oyy} = I_{Ozz}$.

Nous avons aussi : $I(S_1)_O = I(S_2)_O$ donc $I(S)_O = 2I(S_1)_O$

*Calculons le tenseur d'inertie du panneau **(S₁)** en **G₁** :*

$$I_{G1xx} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm = \int_{S_1} y^2 dm = \int_{S_1} y^2 \sigma.dxdy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy = \sigma b.\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I_{G1yy} = \int_{S_1} (x^2 + z^2) dm = \int_{S_1} x^2 dm = \int_{S_1} x^2 \sigma.dxdy = \sigma \int_{-b/2}^{b/2} x^2 dx \int_{-a/2}^{a/2} dy = \sigma a.\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{mb^2}{12}$$

$$I_{G1zz} = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm = I_{G1xx} + I_{G1yy} = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

Les plans (xG_1z) et $(yG_1z$ sont des plans de symétrie, alors tous les produit d'inertie sont nuls : $I_{G1xy} = I_{G1xz} = I_{G1yz} = 0$; on obtient ainsi :

$$I(S_1)_{G1} = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I(S_2)_{G2} = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix}$$

Les coordonnées du point ***G₁*** sont $(c + \frac{b}{2},\ 0,\ 0)$ et celles de ***G₂*** $(-c - \frac{b}{2},\ 0,\ 0)$.

En appliquant le théorème de Huygens comme précédemment nous obtenons les tenseurs d'inertie de S_1 et S_2 au point O.

$$I(S_1)_O = I(S_2)_O = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{12} + m(c+\frac{b}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} + m(c+\frac{b}{2})^2 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie du solide est donné par : $I(S)_O = I(S_1)_O + I(S_2)_O = 2I(S_1)_O$

$$I(S)_O = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mb^2}{6} + 2m(c+\frac{b}{2})^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{6} + 2m(c+\frac{b}{2})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & & D \end{bmatrix}$$

b) Moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) passant par les points O (0, 0, 0) et A(c, c/2, 0)

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par (Δ) , il s'écrit :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{c\,\vec{i} + (a/2)\,\vec{j}}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}\,\vec{i} + \frac{(a/2)}{\sqrt{c^2+(a/2)^2}}\,\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

Le moment d'inertie par rapport à la droite (Δ) est défini par :

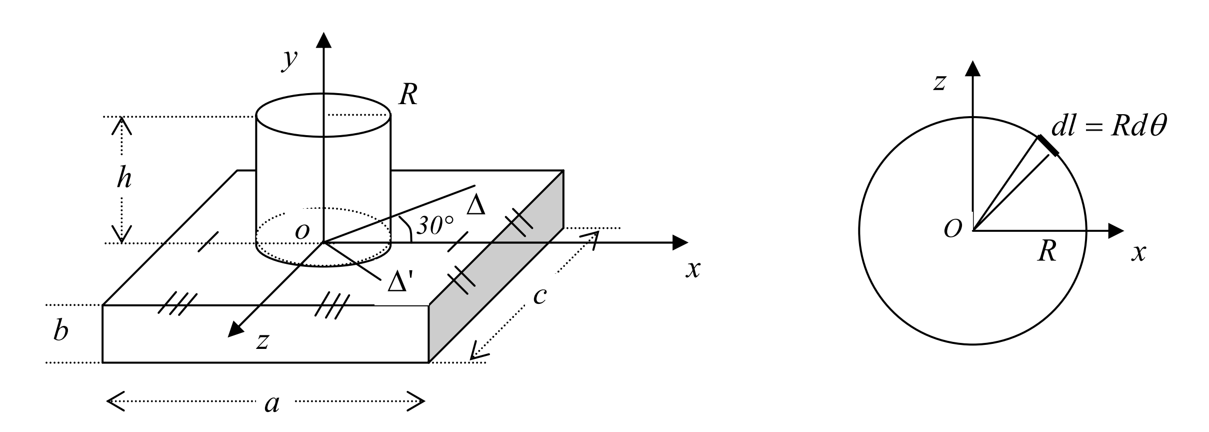
$$I_\Delta = \vec{u}^T . I_O(S).\vec{u} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = (A\cos\alpha, B\sin\alpha, 0)\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_\Delta = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha = \frac{ma^2}{6}\cos^2\alpha + \left[\frac{ma^2}{6} + 2m(c+\frac{b}{2})^2\right]\sin^2\alpha$$

Exercice 15 :

Une pièce mécanique homogène est constituée d'un cylindre creux ***(S₁)*** de masse $\boldsymbol{m_1}$, d'axe ***Oy,*** et soudé à sa base à un parallélépipède ***(S₂)*** de masse $\boldsymbol{m_2}$ tel que représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer :

1. Le tenseur d'inertie de la surface cylindrique au point O ;
2. Le tenseur d'inertie du système $I_O(S)$ au point O ;
3. Le moment d'inertie du système par rapport à la droite (Δ) faisant un angle de $30°$ dans le sens positif avec l'axe Ox et passant par O ;
4. Le produit d'inertie du système par rapport aux droites (Δ) et (Δ') appartenant au plan *(xOz)* tel que $\Delta' \perp \Delta$.



Solution :

1. Tenseur d'inertie de la surface cylindrique *(S₁)* au point *O*

Nous avons un solide ayant un axe de révolution ***(Oy)*** alors : $I_{xx}(S_1) = I_{zz}(S_1)$, nous pouvons aussi voir que les axes ***(Ox)*** et ***(Oz)*** jouent le même rôle.

Les plans ***(xOy)*** et ***(zOy)*** sont des plans de symétrie d'où : $I_{xy}(S_1) = I_{xz}(S_1) = I_{yz}(S_1) = 0$

On choisi un petit élément de surface : $dm_1 = \sigma.Rd\varphi.dy$ avec $0 \le \varphi \le 2\pi$ et $0 \le y \le h$

ayant pour coordonnées : $(R\cos\theta, \quad y, \quad R\sin\theta)$ tel que : $x^2 + z^2 = R^2$

Masse du cylindre : $m_1 = \int_S dm_1 = \int_S \sigma.Rd\theta.dy = \sigma R \int_0^{2\pi} d\theta.\int_0^h dy = \sigma.2\pi R.h$

Nous avons alors :

$$I_{yy}(S_1) = \int_S (x^2 + z^2)dm_1 = \int_S R^2 \sigma R d\theta dy = \sigma R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dy = \sigma R^3.2\pi.h = \sigma.2\pi Rh.R^2 = m_1 R^2$$

Or : $I_{xx}(S_1) = I_{zz}(S_1)$ alors : $I_{xx}(S_1) + I_{zz}(S_1) = 2I_{xx}(S_1) = \int_S (y^2 + z^2)dm_1 + \int_S (x^2 + y^2)dm_1$

$$2I_{xx}(S_1) = \int_S (x^2 + z^2)dm_1 + \int_S 2y^2 dm_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2I_{xx}(S_1) = I_{yy}(S_1) + \int_S 2y^2 dm_1$$

$$I_{xx}(S_1) = \frac{I_{yy}(S_1)}{2} + \int_S y^2 dm_1 = \frac{I_{yy}(S_1)}{2} + \int_S y^2 \sigma.Rd\theta.dy = \frac{I_{yy}(S_1)}{2} + \sigma R \int_0^{2\pi} .d\theta \int_0^h y^2 dy$$

$$I_{xx}(S_1) = \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_1 h^2}{3}$$

$$I_O(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_1 h^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{m_1 h^2}{3} \end{bmatrix}$$

2. Tenseur d'inertie du système $I_O(S)$ au point O ;

$$I_O(S) = I_O(S_1) + I_O(S_2)$$

Calculons le moment d'inertie du parallélépipède : $I_O(S_2)$

Les plans ***(xOy)*** et ***(yOz)*** sont aussi des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy}(S_2) = I_{xz}(S_2) = I_{yz}(S_2) = 0$

On choisi un élément de masse tel que :

$dm_2 = \rho dxdydz$ avec $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}; \ -b \le y \le 0; \ -\frac{c}{2} \le z \le \frac{c}{2}$

La masse su solide (S_2) est : $m_2 = \int_{S_2} \rho dm = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b}^{0} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = \rho \, abc$

Comme les coordonnées sont indépendantes, nous allons calculer séparément les intégrales :

$$\int x^2 dm_2 = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b}^{0} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = \rho \frac{a^3}{12} bc = \frac{m_2 a^2}{12}$$

$$\int y^2 dm_2 = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b}^{0} y^2 dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = \rho a \frac{b^3}{3} c = \frac{m_2 b^2}{3}$$

$$\int z^2 dm_2 = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b}^{0} dy \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz = \rho ab \frac{c^3}{12} = \frac{m_2 c^2}{12}$$

Nous avons ainsi :

$$I_{xx}(S_2) = \int_{S_2} (y^2 + z^2) dm_2 = \frac{m_2 b^2}{3} + \frac{m_2 c^2}{12} = m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{12} \right)$$

$$I_{yy}(S_2) = \int_{S_2} (x^2 + z^2) dm_2 = \frac{m_2 a^2}{12} + \frac{m_2 c^2}{12} = m_2 \left(\frac{a^2 + c^2}{12} \right)$$

$$I_{zz}(S_2) = \int_{S_2} (x^2 + y^2) dm_2 = \frac{m_2 a^2}{12} + \frac{m_2 b^2}{3} = m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right)$$

$$I_O(S_1) = \begin{bmatrix} m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{a^2 + c^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right) \end{bmatrix}$$

Le tenseur d'inertie du système est donné par : $I_{xy}(S_1) = I_{xz}(S_1) = I_{yz}(S_1) = 0$

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} m_1 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) + m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m_1 R^2 + m_2 \left(\frac{a^2 + c^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) + m_2 \left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12} \right) \end{bmatrix}$$

On pose : $I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$.

3. Moment d'inertie du système par rapport à la droite (Δ)

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire porté par l'axe (Δ), il s'écrira : $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + 0.\vec{j} - \sin\alpha\,\vec{k}$

$$\vec{n}\begin{cases}\cos\alpha\\ 0\\ -\sin\alpha\end{cases}$$

Le moment d'inertie par rapport à (Δ) est donné par : $I_\Delta = \vec{n}^T . I_0(S).\vec{n}$

Nous avons ainsi :

$$I_\Delta = (\cos\alpha, 0, -\sin\alpha)\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} = (A\cos\alpha, 0, -C\sin\alpha)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$I_\Delta = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha$; $\quad I_\Delta = \dfrac{3A}{4} + \dfrac{C}{4}$ et en remplaçant A et C nous obtenons :

$$I_\Delta = \frac{3}{4}\left[m_1\left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + m_2\left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{12}\right)\right] + \frac{1}{4}\left[m_1\left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + m_2\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12}\right)\right]$$

4. Produit d'inertie par rapport aux droites (Δ) et (Δ')

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe (Δ) : $\vec{n}\,(\cos\alpha,\ 0,\ -\sin\alpha)$

$\vec{t}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe (Δ') : $\vec{t}\,(\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha)$

Le produit d'inertie par rapport aux droites (Δ) et (Δ') est donné par la relation:

$$I_{\Delta\Delta'} = -\vec{t}^T . I_O(S).\vec{n}$$

$$I_{\Delta\Delta'} = -(\sin\alpha, 0, \cos\alpha)\begin{bmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ -\sin\alpha\end{pmatrix} = -(A\sin\alpha, 0, -C\cos\alpha)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ 0\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}$$

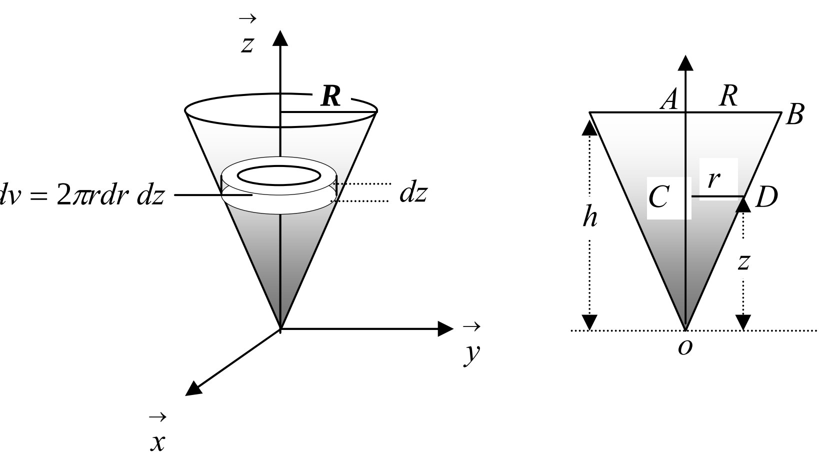
$$I_{\Delta\Delta} = -A\sin\alpha\cos\alpha + C\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}(C - A)$$

$$I_{\Delta\Delta'} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[m_1\left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + m_2\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{12}\right) - m_1\left(\frac{R^2}{2} + \frac{h^2}{3}\right) - m_2\left(\frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{12}\right)\right]$$

$$I_{\Delta\Delta'} = m_2\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2 - c^2}{12}$$

Exercice 16 :

Déterminer le tenseur d'inertie en O, sommet d'un cône plein et homogène d'axe de révolution Oz, de hauteur h et dont le cercle de base a un rayon R, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Solution :

Cône : Deux plans de symétrie *(xoz)* et *(yoz)* $\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les axes ox et oy jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

Nous avons : $x^2 + y^2 = r^2$ et l'élément de masse est égal à : $dm = \rho dv = \rho 2\pi r dr dz$

Dans les triangles ***OAB*** et ***OCD*** , nous avons $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{OC}{OA} \Leftrightarrow \dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{h} \Rightarrow r = \dfrac{R}{h} z$

$0 < r < \dfrac{R}{h} z$ et $0 < z < h$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S r^2 .\rho 2\pi r dr.dz = \rho 2\pi \int_0^h \Big(\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \Big) dz = \rho 2\pi \frac{R^4}{4h^4} \int_0^h z^4 dz = \rho \pi R^2 h. \frac{R^2}{10}$$

or nous avons la masse d'un cône est donnée par : $m = \dfrac{1}{3} \rho \pi R^2 h$ alors $\rho \pi R^2 h = 3m$

d'où : $\underline{I_{zz} = \dfrac{3}{10} m R^2}$

Comme $I_{xx} = I_{yy}$, nous pouvons aussi écrire :

$$2I_{xx} = I_{xx} + I_{yy} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm + \int_{S_1} (x^2 + z^2) dm = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm + 2\int_{S_1} z^2 dm$$

$$2I_{xx} = I_{zz} + 2\int_{S_1} z^2 dm \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} + \int_{S_1} z^2 dm = \frac{3}{20} m R^2 + \int_{S_1} z^2 \rho 2\pi r dr.dz$$

$$I_{xx} = \frac{3}{20}mR^2 + \rho 2\pi \int_0^h \left(\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \right) dz = \frac{3}{20}mR^2 + \rho\pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{3}{20}mR^2 + \rho\pi \frac{R^2}{h^2}\frac{h^5}{5}$$

$$I_{xx} = \frac{3}{20}mR^2 + \rho\pi R^2 h.\frac{h^2}{5} = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 = \frac{3}{5}\left(\frac{mR^2}{4} + mh^2\right)$$

$$I_0(S) = \begin{bmatrix} \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 17 :

Soit une plaque carrée homogène de côté a , de masse m dans un repère orthonormé $R(O, x, y, z)$. Le centre de masse de la plaque est en O, avec l'axe Ox perpendiculaire à la plaque.

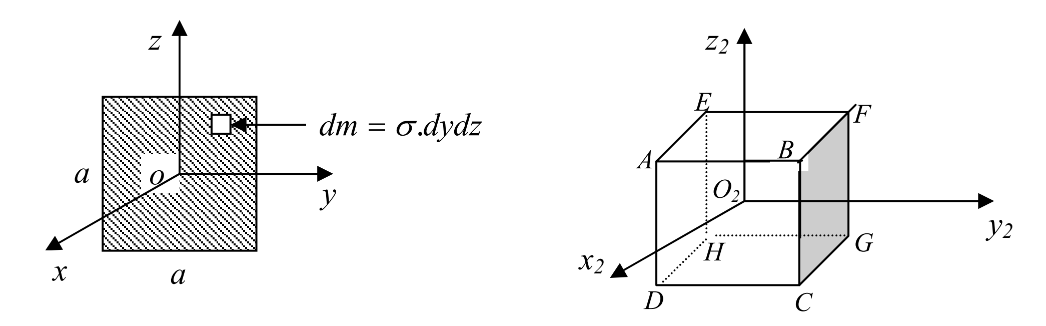
1. Déterminer la matrice d'inertie de la plaque au point O ;
2. A l'aide de plaques identiques, on construit une boîte cubique vide de masse M. On désigne le centre de masse de cette boîte par le point O_2 , qui est aussi le centre du repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$

a) Donner les coordonnées des centres de masses de chaque face de la boîte par rapport au repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$;

b) Déterminer la matrice d'inertie de la boîte dans le repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$;

c) Le repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$ est-il un repère principal d'inertie ?

d) Calculer le moment d'inertie de la boîte par rapport un axe passant par O_2 et F.



Solution :

La plaque est un solide plan de masse $m = \sigma\, a^2$ dont l'axe ***Ox*** est l'axe perpendiculaire à celle-ci alors : $I_{xx} = I_{yy} + I_{zz}$

Les axes ***Oy*** et ***Oz*** jouent le même rôle d'où : $I_{yy} = I_{zz}$

Les plans ***(xOz)*** et ***(yOz)*** sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On choisi un élément de masse $dm = \sigma dydz$ de coordonnées $(0\,,\ y\,,\ z)$ tel que :

$-\frac{a}{2} \le y \le \frac{a}{2}$; $-\frac{a}{2} \le z \le \frac{a}{2}$ On aura ainsi :

$$I_{yy} = \int_S (x^2 + z^2)dm = \int_S z^2 dm = \int_S z^2 \sigma.dydz = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dy. \int_{-a/2}^{a/2} z^2 dz = \frac{\sigma.a^4}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2)dm = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma.dydz = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} y^{22} dy. \int_{-a/2}^{a/2} dz = \frac{\sigma.a^4}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I_{xx} = I_{yy} + I_{zz} = 2I_{yy} = \frac{ma^2}{6}$$

Le tenseur d'inertie de la plaque en son centre O est : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix}$

2.a. Coordonnées des centres d'inertie de chaque plaque formant la boite :

La boite est composée de six plaques identiques symétriques deux à deux par rapport au repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$, O_2 est aussi le centre d'inertie de la boite.

Les centres d'inertie des plaques ont pour coordonnées :

$(ABCD): \left(\frac{a}{2},\ 0,\ 0\right)$; $(EFGH): \left(-\frac{a}{2},\ 0,\ 0\right)$

$(AEFB): \left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$; $(DHGC): \left(0,\ 0,\ -\frac{a}{2}\right)$

$(BFGH): \left(0,\ \frac{a}{2},\ 0\right)$; $(AEHD): \left(0,\ -\frac{a}{2},\ 0\right)$

2.b. Matrice d'inertie de la boîte dans le repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$;

Comme la boîte est cubique, alors tous les plans sont des plans de symétrie et tous les axes jouent le même rôle. Nous aurons une matrice diagonale dont les éléments sont tous égaux. On va procéder en cherchant les matrices d'inertie des plaques deux à deux.

Les plaques *(ABCD)* et *(EFGH)* ont les mêmes matrices d'inertie en leur centre d'inertie :

$$I_G(ABCD) = I_G(EFGH) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} \end{bmatrix}$$

, en utilisant le théorème de Huygens on déduit leurs tenseurs d'inertie au point O_2.

$$I_{O2}(ABCD) = I_{O2}(EFGH) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$I_{O2}(ABCD) = I_{O2}(EFGH) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}$$

on déduit facilement par rotation des axes :

$$I_{O2}(BFGC) = I_{O2}(AEHD) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$I_{O2}(AEFB) = I_{O2}(DHGC) = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{bmatrix}$$

$$I_{O2}(boite) = 2I_{O2}(ABCD) + 2I_{O2}(BFGC) + 2I_{O2}(AEFB)$$

$$I_{O2}(boite) = 2\begin{bmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{bmatrix}$$

$$I_{O2}(boite) = \begin{bmatrix} \frac{5ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{bmatrix}$$

La masse de la boite est donnée par : $M = 6m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{6}$ la matrice s'écrirait :

$$I_{O2}(boite) = \begin{bmatrix} \frac{5Ma^2}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5Ma^2}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{18} \end{bmatrix}$$

2.c. Le repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$ est-il un repère principal d'inertie ?

comme tous les plans de ce repère sont des plans de symétrie et que tous les axes ont le même rôle alors le repère $R(O_2, x_2, y_2, z_2)$ est un repère principal d'inertie. La matrice étant diagonale nous pouvons facilement le vérifier avec tous les axes.

En effet nous avons : $I_{O2}(boite).\vec{x_2} = I_{xx}(boite)$ de même pour les deux autres axes.

2.d. Moment d'inertie de la boîte par rapport à un axe Δ passant par O_2 et F.

Nous avons : $\overrightarrow{O_2F}\begin{pmatrix} -a/2 \\ a/2 \\ a/2 \end{pmatrix}$, soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par cet axe, il s'écrira :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O_2F}}{O_2F} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Le moment d'inertie de la boîte par rapport à un axe passant par O_2 et F est donné par la relation : $I_\Delta = \vec{u}^T . I_{O2}(boite).\vec{u}$

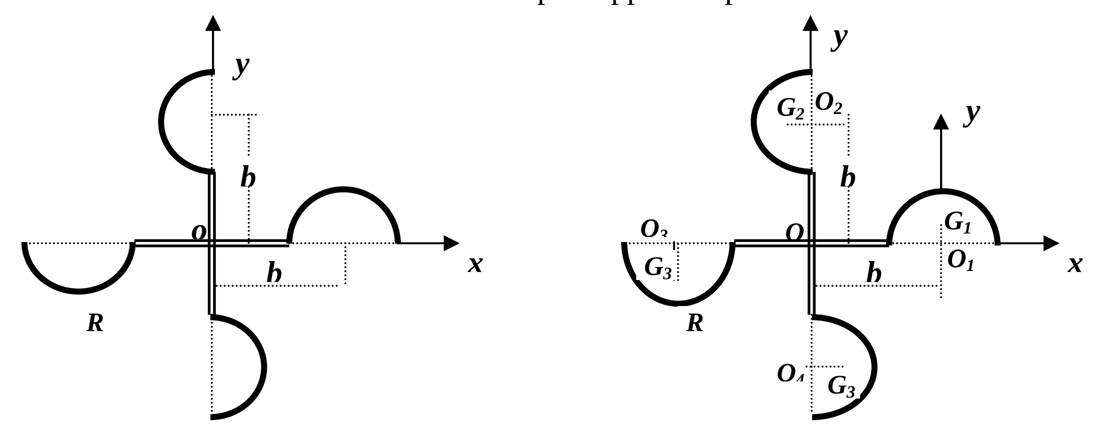
$$I_\Delta = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{bmatrix} \frac{5Ma^2}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5Ma^2}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{18} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{5Ma^2}{18}$$

$I_\Delta = \dfrac{5Ma^2}{18}$ L'axe O_2F est aussi un axe principal d'inertie.

Exercice 18 :

Pour mesurer la vitesse du vent, on construit un anémomètre à l'aide de quatre demi sphères creuses (S_1) , (S_2) , (S_3) , (S_4) de même masse m et de rayon R, liées entre elles par des tiges de masses négligeables, comme représenté sur la figure. La distance des centres des demi sphères au point O est égale à b.

Déterminer le tenseur d'inertie de l'ensemble par rapport au point O.



Solution :

(O_1) , (O_2) , (O_3) , (O_4) : sont les centres des demi sphères

(G_1) , (G_2) , (G_3) , (G_4) : sont les centres d'inertie des demi sphères

$OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = b$

Les centres d'inertie des demi sphères sont connus par rapport à leurs centres respectifs :

$O_1G_1 = O_2G_2 = O_3G_3 = O_4G_4 = \dfrac{R}{2}$ (déjà calculé dans l'exercice **01.**)

Pour résoudre cet exercice nous calculerons les tenseurs d'inertie de chaque demi sphère en son centre O_i puis on le calculera en son centre d'inertie G_i par le théorème de Hugens. On passera ensuite de chaque centre d'inertie au point O en appliquant encore une fois le théorème de Huygens.

1. Moment d'inertie de la sphère *(S₁)* en *O₁*

Nous avons : (xO_1y) et (zO_1y) des plans de symétrie alors : $I_{O_1xy} = I_{O_1xz} = I_{O_1yz} = 0$

Les axes O_1x et O_1z jouent le même rôle donc : $I_{O_1xx} = I_{O_1zz}$

Le moment d'inertie d'une demi sphère creuse a été déjà calcule dans les exercice précédents. On choit un élément de surface : tel que $dm = \sigma ds = \sigma R^2 d\psi \cos\theta d\theta$ avec : $0 \le \psi \le 2\pi$ et $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Nous avons aussi : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

Calculons : I_{O_1xx}

On peut écrire : $I_{O_1xx} + I_{O_1zz} = \int_{S_1} (y^2 + z^2)dm + \int_{S_1} (x^2 + y^2)dm$

$$2I_{O_1xx} = \int_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)dm + \int_{S_1} y^2 dm = \int_{S_1} R^2 dm + \int_{S_1} R^2 \sin^2\theta.\sigma R^2 d\psi \cos\theta d\theta$$

$$2I_{O_1xx} = mR^2 + \sigma R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta.cd(\sin\theta) \int_0^{2\pi} d\psi = mR^2 + \sigma R^4.\frac{1}{3}.2\pi = mR^2 + \sigma 2\pi R^2.\frac{R^2}{3} = \frac{4mR^2}{3}$$

$$2I_{O_1xx} = \frac{4mR^2}{3} \quad \Rightarrow \quad I_{O_1xx} = \frac{2}{3}mR^2 = I_{O_1zz}$$

Calcul de I_{O_1yy}

$$I_{O_1yy} = \int_{S_1} (x^2 + z^2)dm = \int_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)dm - \int_{S_1} y^2 dm = \int_{S_1} R^2 dm - \int_{S_1} R^2 \sin^2\theta.\sigma R^2 d\psi \cos\theta d\theta$$

$$I_{O_1yy} = mR^2 - \sigma R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta.cd(\sin\theta) \int_0^{2\pi} d\psi = mR^2 - \frac{mR^2}{3} = \frac{2}{3}mR^2$$

Le tenseur d'inertie de ***(S₁)*** en ***O₁*** est : $I_{O_1}(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{bmatrix}$

On déduit le tenseur d'inertie au point G_1 dans le repère (O_1, x, y, z) par le théorème de Huygens : les coordonnées de G_1 sont $(0,\ \frac{R}{2},\ 0)$ dans ce repère.

$$I_{O_1}(S_1) = I_{G_1}(S_1) + m\left(d_1^2\right) \quad \Rightarrow I_{G_1}(S_1) = I_{O_1}(S_1) - m\left(d_1^2\right)$$

$$I_{G_1}(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 - 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Le tenseur d'inertie au point O dans le repère (O, x, y, z) se déduit aussi par le théorème de Huygens : les coordonnées de G_1 sont $(b,\ \frac{R}{2},\ 0)$ dans ce repère.

$$I_O(S_1) = I_{G_1}(S_1) + m\left(D_1^2\right)$$

$$I_O(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 & -mb\frac{R}{2} & 0 \\ -mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 - 0 + mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(b^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$I_O(S_1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & -mb\frac{R}{2} & 0 \\ -mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie de (S_3) se déduit facilement à partir de celui de (S_1). Les coordonnées de G_3 sont $(-b,\ -\frac{R}{2},\ 0)$ dans le repère (O, x, y, z), nous avons donc : $\underline{I_O(S_1) = I_O(S_3)}$

De la même manière pour les demi sphères (S_2) et (S_4), nous avons :

Le tenseur d'inertie de ***(S₂)*** en ***O₂*** est : $I_{O_2}(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{bmatrix}$

On déduit le tenseur d'inertie au point G_2 dans le repère (O_2, x, y, z) par le théorème de Huygens : les coordonnées de G_2 sont $(-\frac{R}{2}\ \ 0,,\ 0)$ dans ce repère.

$$I_{O_2}(S_2) = I_{G_2}(S_2) + m(d_2^2) \quad \Rightarrow I_{G_2}(S_2) = I_{O_2}(S_2) - m(d_2^2)$$

$$I_{G_2}(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 - 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Le tenseur d'inertie au point O dans le repère (O, x, y, z) se déduit aussi par le théorème de Huygens : les coordonnées de G_2 sont $(-\frac{R}{2},\ b,\ 0)$ dans ce repère.

$$I_O(S_2) = I_{G_2}(S_2) + m(D_2^2)$$

$$I_O(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 - 0 + mb^2 & mb\frac{R^2}{2} & 0 \\ mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 - m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(b^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right) \end{bmatrix}$$

$$I_O(S_2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 & mb\frac{R}{2} & 0 \\ mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 \end{bmatrix}$$

Le moment d'inertie de (S_4) se déduit facilement à partir de celui de (S_2). Les coordonnées de G_3 sont $(\frac{R}{2},\ -b,\ 0)$ dans le repère (O, x, y, z), nous avons donc : $\underline{I_O(S_2) = I_O(S_4)}$

Le tenseur d'inertie du système au point O est donné par :

$I_O(S) = 2I_O(S_1) + 2\,I_O(S_2)$

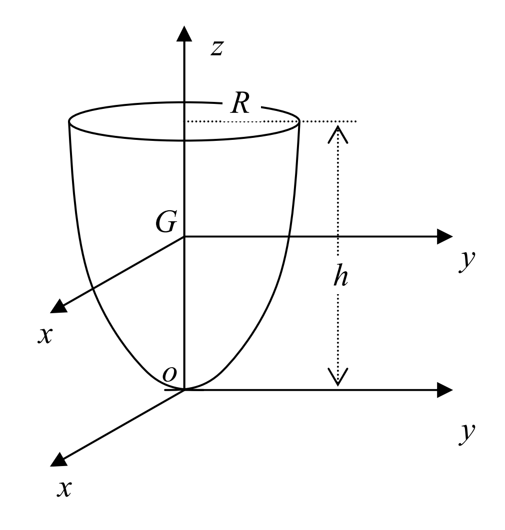
$$I_O(S) = 2\begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & -mb\frac{R}{2} & 0 \\ -mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 & mb\frac{R}{2} & 0 \\ mb\frac{R}{2} & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 + mb^2 \end{bmatrix}$$

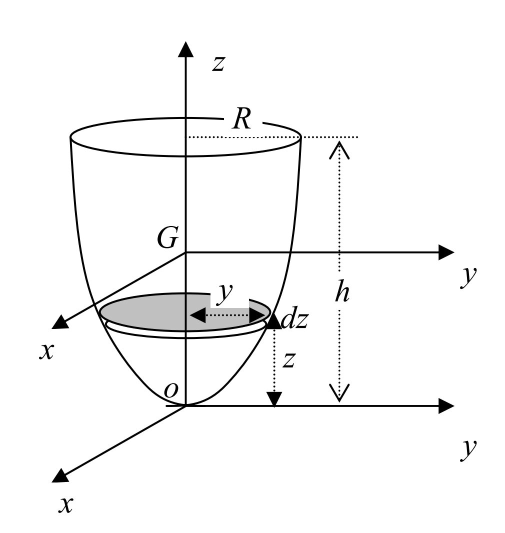
$$I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{8}{3}mR^2 + 2mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}mR^2 + 2mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3}mR^2 + 4mb^2 \end{bmatrix}$$

Exercice 19 :

Un solide homogène de densité ρ, de forme paraboloïde, est engendré par la rotation d'une surface parabolique autour de l'axe oz. L'équation de la parabole limitant cette surface est donnée par : $z = \frac{h}{R^2}y^2$

1. Montrer que la masse du solide est : $M = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 h$;
2. Déterminer le tenseur d'inertie du solide au point $\boldsymbol{O}$;
3. Calculer le moment d'inertie en G suivant l'axe Gx : I_{Gx}





Solution :

1. Masse du solide

On considère un élément de volume : $dv = s.dz = \pi y^2 dz$

La masse du solide est égale à :

$$M = \rho \int_S dv = \rho \int_S \pi y^2 dz = \rho\pi \int_0^h \frac{R^2}{h} z dz = \rho\pi \frac{R^2}{h} . \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}\rho\pi R^2 h$$

2. Tenseur d'inertie du solide au point *O* ;

Le solide a un axe de révolution *(Oz)* donc les axes *(Ox)* et *(Oy)* jouent le même rôle, nous avons ainsi : $I_{Oxx} = I_{Oyy}$

$$I_{Oxx} = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_0^h (\frac{R^2}{h} z + z^2) \rho . \pi y^2 dz = \int_0^h (\frac{R^2}{h} z + z^2) \rho . \pi \frac{R^2}{h} z dz$$

$$I_{Oxx} = \rho\pi \left[\int_0^h \frac{R^4}{h} z^2 dz + \int_0^h \frac{R^2}{h} z^3 dz \right] = \rho\pi \left[\frac{R^4}{h^2} \frac{h^3}{3} + \frac{R^2}{h} \frac{h^4}{4} \right] = \rho\pi R^2 h \left[\frac{R^2}{3} + \frac{h^2}{4} \right]$$

$$I_{Oxx} = 2M \left[\frac{R^2}{3} + \frac{h^2}{4} \right] = \frac{M}{6}\left(4R^2 + 3h^2\right)$$

$$I_{Ozz} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2 - z^2) dm = \int_S (x^2 + z^2) dm + \int_S y^2 dm - \int_S z^2 dm$$

$$I_{Ozz} = I_{Oyy} + \int_S y^2 \rho\pi y^2 dz - \int_S z^2 \rho\pi y^2 dz = I_{Oyy} + \rho\pi \int_S \frac{R^4}{h^2} z^2 dz - \rho\pi \int_S \frac{R^2}{h} z^3 dz$$

$$I_{Ozz} = I_{Oyy} + \rho\pi \frac{R^4}{h^2} . \frac{h^3}{3} - \rho\pi \frac{R^2}{h} . \frac{h^4}{4} = I_{Oyy} + \rho\pi R^2 h \left[\frac{R^2}{3} - \frac{h}{4} \right] = I_{Oyy} + 2M \left[\frac{R^2}{3} - \frac{h}{4} \right]$$

$$I_{Ozz} = I_{Oyy} + \frac{M}{6}\left(4R^2 - 3h^2\right) = \frac{M}{6}\left(4R^2 + 3h^2\right) + \frac{M}{6}\left(4R^2 - 3h^2\right) = \frac{4}{3} M R^2$$

Le tenseur d'inertie s'écrit : $I_O(S) = \begin{bmatrix} \frac{M}{6}\left(4R^2 + 3h^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{6}\left(4R^2 + 3h^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} M R^2 \end{bmatrix}$

3. Calcul du moment d'inertie en G suivant l'axe Gx : I_{Gxx}

Nous utiliserons le théorème de Huygens pour passer du point O au point G.

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + M\left(d^2\right) \quad \Rightarrow \quad I_{Gxx} = I_{Oxx} - M\left(d^2\right)$$

Déterminons d'abord les coordonnées du centre d'inertie G :

L'axe (Oz) étant un axe de révolution alors le centre d'inertie se trouve sur cet axe d'où :

$$x_G = y_G = 0 \quad \text{et} \quad z_G = \frac{1}{M}\int_S z dm$$

$$z_G = \frac{1}{M}\int_S z\rho\pi y^2 dz = \frac{\rho\pi}{M}\frac{R^2}{h}\int_0^h z^2 dz = \frac{\rho\pi}{M}\frac{R^2}{h}.\frac{h^3}{3} = \frac{2\rho\pi}{\rho\pi R^2 h}\frac{R^2}{h}.\frac{h^3}{3} = \frac{2}{3}h$$

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

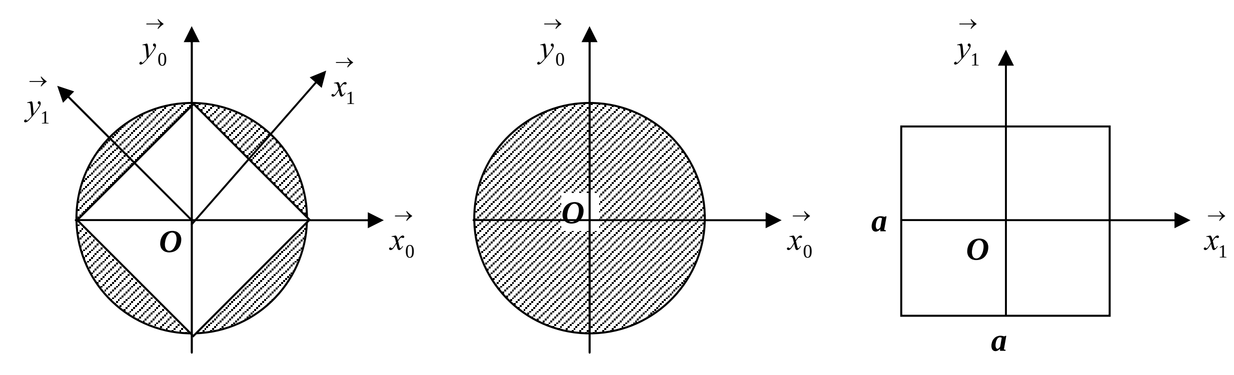
on déduit : $I_{Gxx} = I_{Oxx} - M(y_G^2 + z_G^2) = \frac{M}{6}\left(4R^2 + 3h^2\right) - M\frac{4}{9}h^2 = \frac{M}{6}\left(4R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$

$$I_{Gxx} = \frac{M}{6}\left(4R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$

Exercice 20 :

On découpe une plaque carré de côté ***a*** et de masse ***m*** dans un disque plein et homogène de masse ***M*** et de rayon ***R***, tel que représenté dans la figure

1. Déterminer le tenseur d'inertie du disque par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
2. Déterminer le tenseur d'inertie de la plaque dans le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ puis dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
3. En déduire le tenseur d'inertie du système dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



Solution :

1. Tenseur d'inertie du disque plein dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Déjà calculé à l'exercice **11.3**

$$I_O(disque)\Big|_{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}_{R_0} = \frac{MR^2}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{R_0}$$

2. Tenseur d'inertie de la plaque dans le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Les plan ***(xOz)*** et ***(yOz)*** sont des plans de symétrie alors tous les produits d'inertie sont nuls.

Les axes Ox et Oy jouent le même rôle : $I_{xx}(plaque) = I_{yy}(plaque)$

Solide plan : $z = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{zz}(plaque) = I_{xx}(plaque) + I_{yy}(plaque) = 2I_{xx}(plaque)$

$$I_{xx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma dxdy = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy = \sigma \frac{a^4}{12} = \sigma a^2 \frac{a^2}{12} = \frac{ma^2}{12}$$

$$I_{yy} = I_{xx} \quad \text{et} \quad I_{zz} = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_O(plaque)\Big|_{R_1} = \begin{bmatrix} \frac{ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{6} \end{bmatrix}_{R_1} = \frac{ma^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{R_1}$$

On détermine le tenseur d'inertie de la plaque dans le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en utilisant la matrice de passage du repère R_1 vers le repère R_0.

Nous avons : $\vec{x}_1 = \cos 45° \vec{x}_0 + \sin 45° \vec{y}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{x}_0 + \vec{y}_0)$

$$\vec{y}_1 = -\sin 45° \vec{x}_0 + \cos 45° \vec{y}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{x}_0 + \vec{y}_0)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

Sous forme matricielle nous aurons : $\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$

La matrice de passage du repère R_1 vers le repère R_0 est donnée par :

$$P_{R1\to R0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^T_{R1\to R0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Le tenseur d'inertie de la plaque dans le repère R_1 est calculé par :

$$I_O(plaque)\Big|_{R_0} = P^T_{R1\to R0} \, . \, I_O(plaque)\Big|_{R_1} \, . \, P_{R1\to R0}$$

$$I_O(plaque)\Big|_{R_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} . \frac{ma^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{R_1} . \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$I_O(plaque)\Big|_{R_0} = \frac{ma^2}{24}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{24}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$= \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{R_0}$$

le résultat reste inchangé dans les deux repères.

3. Tenseur d'inertie du système dans le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

$$I_O(Système) = I_O(disque) - I_O(plaque)$$

$$I_O(Système) = \frac{MR^2}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{R_0} - \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}_{R_0} = \left(\frac{MR^2}{4} - \frac{ma^2}{12}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{R_0}$$

or nous avons : $a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad a = R\sqrt{2}$ en le remplaçant dans l'expression du tenseur, nous obtenons :

$$I_O(Système) = \left(\frac{MR^2}{4} - \frac{2mR^2}{12}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{R_0}$$

$$I_O(Système) = \frac{1}{12}(3M - 2m)R^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}_{R_0}$$

CHAPITRE V

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

1. Définition

La cinématique est l'étude des mouvements dans l'espace et le temps indépendamment des causes qui les a produit et des phénomènes qui les influencent. La position du point matériel P est déterminée dans l'espace à chaque instant du mouvement.

Par rapport à la statique où à la géométrie des masses, traités dans les chapitres précédents, la cinématique introduit un nouveau paramètre qui est le temps. Ce paramètre sert à fixer et à repérer toutes les positions occupées par le point matériel, parmi toutes les positions qu'il a occupé auparavant.

La notion de temps permet de rendre compte de la simultanéité de deux événements, de l'ordre de leurs successions et de la durée de l'intervalle qui les sépare. Ceci nous amène à travailler dans un repère où un observateur lié à ce repère, peut étudier le mouvement dans l'espace et le temps.

2. Hypothèses fondamentales

Pour étudier le mouvement d'un point matériel P où plus généralement d'un système de particules où de solides un observateur doit repérer leur position :

- dans l'espace ;
- dans le temps.

En cinématique classique, on suppose que :

- l'espace est Euclidien (à trois dimensions) ;
- le temps est absolu (indépendant de l'observateur)

3. Les référentiels

Afin d'étudier complètement le mouvement cinématique, l'observateur doit définir :

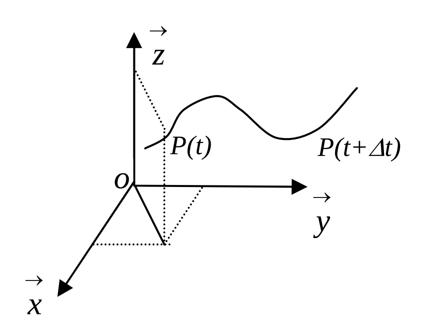
- un repère d'espace, lié à l'observateur, avec une origine O et une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le trièdre $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ainsi constitué défini complètement le repère d'espace ;
- un repère de temps (échelle de temps) par une origine et une unité de mesure. Dans le système MKSA la seconde est l'unité de mesure du temps.

Le repère d'espace et le repère de temps définissent à eux deux le repère <<espace temps>> noté (R).

Dans ce repère, à un instant donné par l'horloge, la position d'un point *P(t)* est définie par ses coordonnées , *x(t) ; y(t) ; z(t)* tel que :

$$\overrightarrow{OP} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

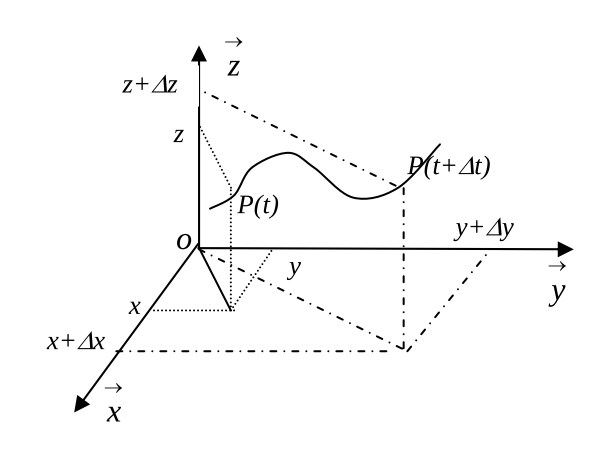
La position du point P est connue de façon instantanée dans l'espace et dans le temps.



3.1. Trajectoires et vecteurs vitesses

Soit P un point matériel repéré dans un référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ fixe. Sa position est donnée à chaque instant par le vecteur : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$. On dit que le vecteur $\vec{r}(t)$ a pour composante dans le repère fixe : $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$ à l'instant t .

Le déplacement du point P dans l'espace est donné par les équations paramétriques des coordonnées (x, y, z) en fonction du temps. En éliminant le paramètre temps entre elles, on obtient la trajectoire décrite par ce point dans l'espace.



$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$: position du point P dans $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à l'instant t .

$\vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OP}(t+\Delta t)$: position du point P dans $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ à l'instant $t+\Delta t$.

Le vecteur déplacement de la position $\vec{r}(t)$ à $\vec{r}(t+\Delta t)$ est donnée par : $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$. Les positions occupées par le point P dans l'espace, décrivent une trajectoire (Γ) par rapport au référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ choisi.

Exemple : $\vec{r}(t)=\begin{cases} x(t)=2t^2+3 \\ y(t)=t/2 \\ z(t)=0 \end{cases}$, en éliminant t on obtient : $x=8y^2+3$

C'est l'équation d'une parabole dans le plan *(xoy)*. Le mouvement se fait selon une trajectoire parabolique.

La trajectoire à elle seule n'est pas suffisante pour caractériser complètement le mouvement du point P. Il est nécessaire de préciser et d'étudier les variations du vecteur déplacement car ceci nous amènera à connaître le vecteur vitesse du point par la première dérivée et le vecteur accélération par la seconde dérivée par rapport au temps. Ces deux vecteurs permettent de caractériser totalement le mouvement du point P sur la trajectoire.

3.2. Vecteur vitesse

Le point matériel se déplace de la position *P(t)* à la position *P(t+Δt)* pendant la durée de temps Δt à la vitesse moyenne : $\vec{V}_{moy}(t)=\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$;

Le vecteur vitesse instantanée est obtenu lorsque : $\Delta t\to 0$, elle est définie par :

$\vec{V}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{V}_{moy}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$, on a ainsi la vitesse instantanée: $\vec{V}(t)=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$

3.3. Vecteur accélération

La dérivée du vecteur vitesse dans le même repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ donne l'accélération instantanée du point P : $\vec{\gamma}(t)=\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}=\dfrac{d^2\vec{t}(t)}{dt^2}$

Les deux vecteurs cinématiques permettent de comprendre la nature du mouvement et de prévoir les différentes phases selon le que le vecteur vitesse est de même sens ou de sens contraire au vecteur accélération.

4. Les systèmes de coordonnées

Le point matériel P peut être repéré dans l'espace dans un repère fixe (R) de centre O par trois types de coordonnées différentes mais liées entre elles :

- Cartésiennes : (x, y, z) vecteurs unitaires du repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- Cylindriques : (r, θ, z) vecteurs unitaires du repère $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k})$
- Sphériques : (r, θ, φ) vecteurs unitaires du repère $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$

Ces trois types de coordonnées permettent de décrire tous les types de mouvements du point P dans l'espace.

4.1. Les coordonnées cartésiennes

Elles sont aussi appelées coordonnées rectangulaires.

Si le point P est repéré dans $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) qui dépendent du temps, alors le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ s'écrirait : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$; on déduit le vecteur vitesse et le vecteur accélération par la première et la seconde dérivée :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \;;\quad \text{notée sous forme : } \vec{V}(t) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k}$$

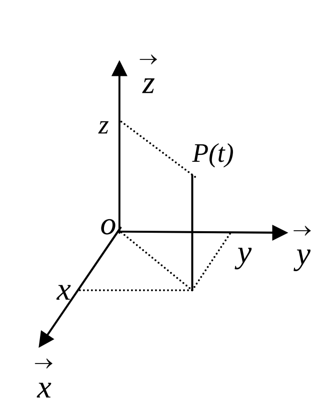
$$\text{avec : } \left|\vec{V}\right|(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\,\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \;;\quad \text{notée sous forme : } \vec{\gamma}(t) = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\text{avec : } \left|\vec{\gamma}\right|(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \;;\quad \overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}_R$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



4.2. Les coordonnées cylindriques (r, θ, z)

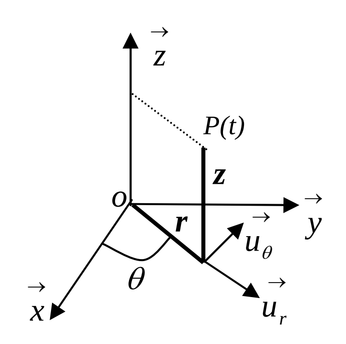
Si le point P est repéré par les coordonnées cylindriques : (r, θ, z) qui dépendent du temps dans un repère $R(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$, le vecteur position s'écrirait : $\overrightarrow{OP} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\,\vec{k}$$

avec $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$, on obtient ainsi :

$$\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

$$V_r = \dot{r} \;,\; V_\theta = r\dot{\theta} \;,\; V_z = \dot{z}$$



Dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$ s'écrit : $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{cases}$

L'accélération est déterminée par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\,\vec{u}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta)}{dt} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

or nous avons : $\dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$; $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u}_r$

L'expression de l'accélération devient :

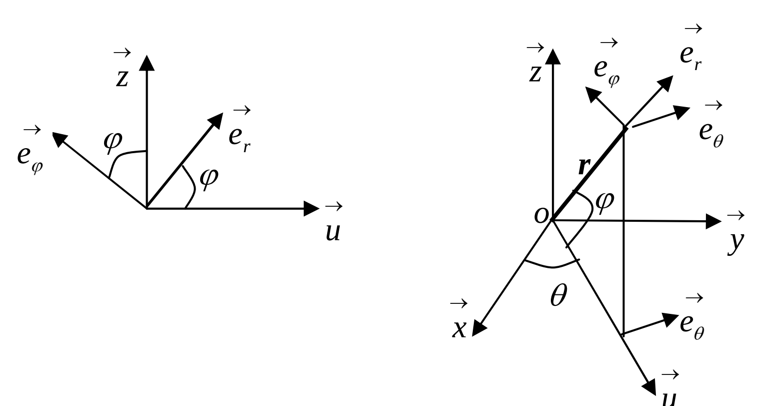
$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k} \quad \text{d'où :} \quad \gamma = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$$

$$\gamma_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \;;\; \gamma_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \;;\; \gamma_z = \ddot{z}$$

4.3. Les coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour composantes : $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{cases}$

En coordonnées sphériques il s'écrit : $\overrightarrow{OP} = OP.\vec{e}_r = r\,\vec{e}_r$



avec :

$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{u} + \sin\varphi\,\vec{k}$; $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{k}$

$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$; $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{e}_\theta$; $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}$; $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$; $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_r$

alors : $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{u} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$

$\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}(-\sin\varphi\,\vec{u} + \cos\varphi\,\vec{k}) = \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$; on déduit la vitesse du point P :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d(r\,\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \;;\; \Rightarrow \; \vec{V} = \begin{cases} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta}\cos\varphi \\ V_\varphi = r\dot{\varphi} \end{cases}$$

l'accélération se déduit facilement en dérivant l'expression de la vitesse par rapport au temps :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\,\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta)}{dt} + \frac{d(r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)}{dt}$$

(1) : $\dfrac{d(\dot{r}\,\vec{e}_r)}{dt} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

(2) : $\dfrac{d(r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta)}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\cos\varphi\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{u} = -\dot{\theta}(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi)$$

$$\frac{d(r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta)}{dt} = \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\cos\varphi(\cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi)$$

$$\frac{d(r\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta)}{dt} = -r\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\,\vec{e}_r + (\dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\cos\varphi - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

(3) $:\frac{d(r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}$

comme $\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$ alors $\frac{d(r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$

En sommant les trois termes, on aboutit à :

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\cos^2\varphi$$

$$\gamma_\theta = \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{r}\dot{\theta}\cos\varphi + r\ddot{\theta}\cos\varphi - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi = \frac{\cos\varphi}{r}.\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\gamma_\varphi = \dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi + \dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r}.\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi$$

5. Les mouvements curvilignes

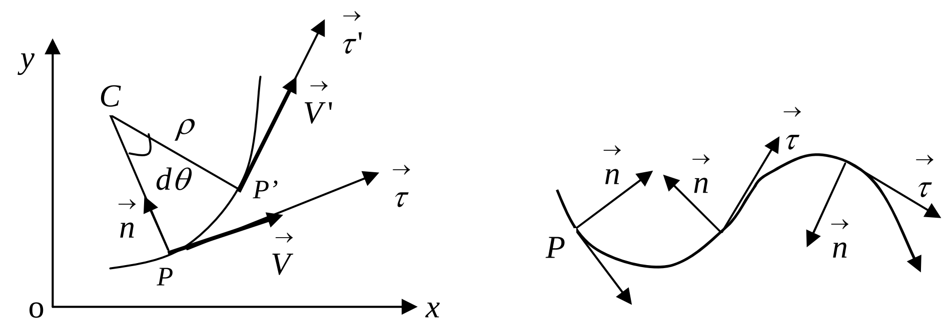
Soit P un point matériel décrivant une trajectoire curviligne le long d'une courbe (Γ). Les composantes normale $\vec{n}$ et tangentielle $\vec{\tau}$ à la courbe au point P sont naturellement les plus usitées pour décrire les mouvements curvilignes. Les composantes sont en mouvement avec le point matériel, le long de la trajectoire. Le sens positif de la normale est choisi dans toutes les positions vers le centre de la courbure. Ainsi le sens de la normale change en fonction de la courbure de la trajectoire.

La vitesse et l'accélération du point matériel P, sont déterminées à partir de ces composantes et de leur changement de direction. Considérons un élément de cette courbe et étudions le mouvement du point matériel sur cette trajectoire.

5.1. Abscisse curviligne

Pendant une petite variation de temps dt, le point matériel est passé de la position P vers P' parcourant une distance ds (longueur d'arc) le long de la courbe avec un rayon de courbure ρ. Les points P et P' sont infiniment voisins de telle sorte que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{PP'}$ compris, entre les deux points soit confondue avec la longueur $ds = PP'$.

La courbe est alors orientée dans le sens positif des s croissant. *La variable* s *est appelée abscisse curviligne du point* P .



5.2. Tangente, Normale et Rayon de courbure

A partir de la définition de l'abscisse curviligne nous pouvons écrire: $ds = \rho d\theta$

Le vecteur déplacement $\overrightarrow{OP}$ est une fonction paramétrique de la variable angulaire θ.

Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la courbe est donné par la relation :

$$\vec{\tau} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{ds} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{V}\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt} \quad \text{et nous avons aussi } V = \frac{ds}{dt} = \left\|\frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}\right\|$$

Nous avons aussi : $\vec{\tau}^2 = 1$ alors $\dfrac{d\left(\vec{\tau}^2\right)}{d\theta} = 2\,\vec{\tau}\bullet\dfrac{d\left(\vec{\tau}\right)}{d\theta} = 0$, alors $\dfrac{d\,\vec{\tau}}{d\theta}$ est perpendiculaire $\vec{\tau}$

on pose $\dfrac{d\,\vec{\tau}}{d\theta} = \vec{n}$; nous pouvons écrire : $\dfrac{d\,\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d\,\vec{\tau}}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{\rho}.\vec{n}$

comme $\dfrac{ds}{d\theta} = \rho$; alors $\dfrac{d\,\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{\rho}$.

- le vecteur unitaire $\vec{n}$ de direction normale à la courbe (Γ) au point P est dirigé vers le centre de la courbure ;
- ρ est un scalaire positif appelé rayon de courbure de la courbe (Γ) au point P.

on déduit à partir du produit vectoriel du vecteur unitaire tangent à la courbe et du vecteur unitaire perpendiculaire à la courbe au même point P un troisième vecteur unitaire appelé binormale : $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$. Ces trois vecteurs $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ forment une base orthonormée direct.

Nous avons aussi : $\vec{n}^2 = 1 \Rightarrow \vec{n} \bullet \frac{d\vec{n}}{ds} = 0$ alors $\frac{d\vec{n}}{ds}$ a des composantes dans le plan perpendiculaire à $\vec{n}$, il s'écrit alors : $\frac{d\vec{n}}{ds} = \lambda\vec{\tau} + \mu\vec{b}$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{\tau} \wedge \vec{n}) = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \wedge \vec{n} + \vec{\tau} \wedge \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \wedge \vec{n} + \vec{\tau} \wedge (\lambda\vec{\tau} + \mu\vec{b}) = \vec{\tau} \wedge \mu\vec{b}) = -\mu\vec{n}$$

d'où $\frac{d\vec{b}}{ds} = -\mu\vec{n}$. on pose par convention $-\mu = \frac{1}{T}$; nous obtenons finalement :

$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{T}$: le scalaire $\frac{1}{T}$ est appelé torsion au point P de la courbe (Γ) il peut être positif ou négatif suivant que le vecteur $\frac{d\vec{b}}{ds}$ a même sens que le vecteur $\vec{n}$ ou le sens contraire. Nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{\tau}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{T}\vec{n} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \vec{n}\frac{1}{\rho} = -\frac{\vec{b}}{T} - \frac{\vec{\tau}}{\rho}$$

on déduit finalement une relation entre les trois vecteurs de la base :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{b}}{T} - \frac{\vec{\tau}}{\rho}$$

5.3. Repère de Frénet

Les deux vecteurs unitaires ainsi définis, tangentiel $\vec{\tau}$ et normal $\vec{n}$ au point P constituent les premiers vecteurs de la base de Frénet. Le troisième vecteur unitaire $\vec{b}$ de la base est obtenu par le produit vectoriel des deux premiers, il est appelé binormale à la courbe (Γ) au point P est défini par : $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$.

La base ainsi obtenue est appelée base de Frénet. Elle dépend de l'abscisse curviligne s lié au point P. Le repère $R(P, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ lié au point P est appelé repère de Frénet.

5.4. Vitesse et accélération du point P dans le repère de Frénet

Pendant une petite variation de temps dt le point matériel est passé de P à P' parcourant une distance ds le long de la courbe ayant un rayon de courbure ρ.

Nous pouvons écrire : $ds = \rho \; d\theta$ où $d\theta$ est la variation de l'angle compris entre le vecteur unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{\tau}'$ tangents à la courbe aux points P et P'.

- La vitesse du point P est donnée par : $V = \dfrac{ds}{dt} = \rho \dfrac{d\theta}{dt}$; sous la forme vectorielle, elle s'écrit : $\vec{V} = \rho \dfrac{d\theta}{dt} \vec{\tau} = \rho \dot{\theta} \vec{\tau} = V \vec{\tau}$ avec $V = \rho \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{V}{\rho}$

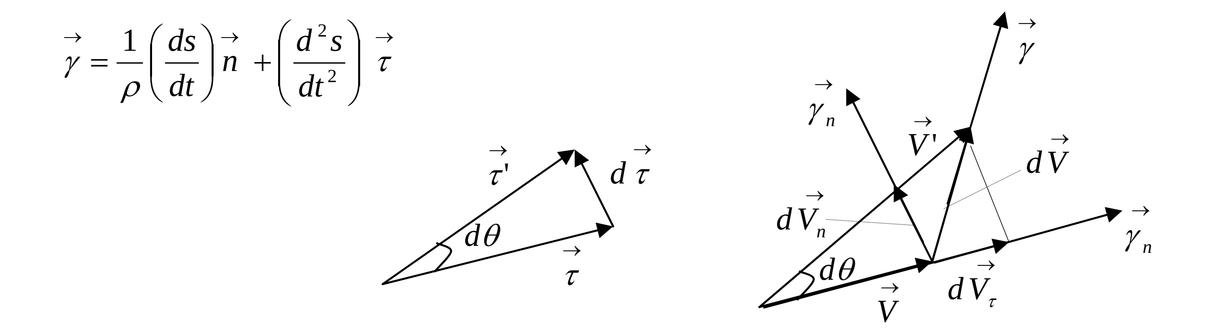
- L'accélération du point P est donnée par :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = V \frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{dV}{dt}\vec{\tau} \quad \text{nous avons :} \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{n} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{\tau}$$

on déduit : $\vec{\gamma} = V \dot{\theta} \vec{n} + \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau}$; comme $\dot{\theta} = \dfrac{V}{\rho}$ l'expression de l'accélération devient :

$\vec{\gamma} = \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n} + \dot{V}\vec{\tau}$ Cette expression peut aussi s'écrire en fonction de s et de t car $V = \dfrac{ds}{dt}$

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)\vec{n} + \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\vec{\tau}$$



6. Les mouvements particuliers

6.1. Mouvement à trajectoire circulaire

On dit que la trajectoire d'un point P est circulaire dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe, si le point P se déplace le long du périmètre du cercle de rayon a constant et appartenant au même repère.

On choisit un cercle dans le plan *(Oxy)* de telle sorte que son centre coïncide avec celui du repère. Le point P sur le cercle est repéré par deux coordonnées :

Le rayon a du cercle et l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OP})$ que fait les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

Soit $\vec{e}_r$ le vecteur défini par : $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}$, alors nous avons : $\overrightarrow{OP} = OP.\vec{e}_r$

Le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ change de direction avec l'angle θ : d'où $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$

Le rayon de courbure est ici constant, la vitesse du point P est donnée par la dérivée du vecteur position :

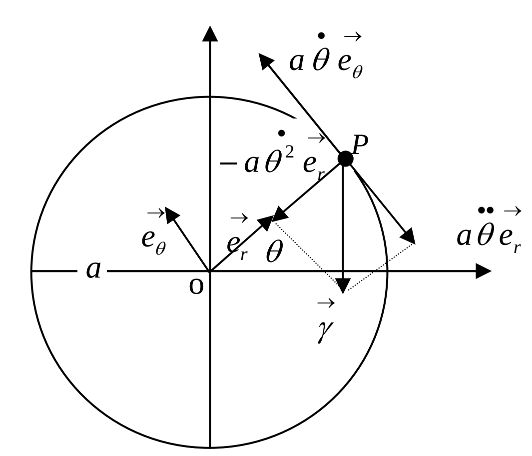
$$\vec{V}(P) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = a\frac{d\vec{e}_r}{dt} = a\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

L'accélération du point P se déduit par :

$$\vec{\gamma}(P) = \frac{d\vec{V}(P)}{dt} = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$\dot{\theta} = \omega$: vitesse angulaire du point P ;

$\ddot{\theta} = \dot{\omega}$: accélération angulaire du point P .



La vitesse du point P est tangente au cercle et a pour valeur algébrique : $\vec{V}(P) = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

L'accélération du point P a deux composantes : l'une tangentielle : $\gamma_t = a\ddot{\theta} = a\dot{\omega}$, l'autre normale : $\gamma_n = -a\dot{\theta}^2 = -a\omega^2$. On remarque que le vecteur accélération normal $\vec{\gamma}_n$ est toujours de sens opposé au vecteur position $\overrightarrow{OP}$: $\vec{\gamma}_n = -a\omega^2\vec{e}_r = -\omega^2\overrightarrow{OP}$

Connaissant la vitesse et l'accélération angulaire nous pouvons connaître la nature du mouvement :

Si $\dot{\theta}\ddot{\theta} > 0$ le mouvement est accéléré

Si $\dot{\theta}\ddot{\theta} < 0$ le mouvement est retardé

Si $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = Cte$ le mouvement est uniforme, l'accélération tangentielle est nulle, mais l'accélération normale ne l'est pas.

6.2. Mouvement à trajectoire hélicoïdale

Un point P est en mouvement sur une trajectoire hélicoïdale dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'il décrit une hélice droite, dessinée sur un cylindre de rayon a.

Les coordonnées cartésiennes du point P dans ce repère sont données par les équations paramétriques en fonction du temps t sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta(t) \\ y(\theta) = a\sin\theta(t) \\ z(\theta) = b\theta(t) \end{cases} \quad ; \qquad a : \text{ rayon de l'hélice}$$

L'angle θ joue le même rôle que dans les coordonnées cylindriques ou polaires. Le paramètre $b = Cte$ est appelé pas de l'hélice. On remarque que, lorsque l'angle θ augmente de 2π les positions x et y ne changent pas mais suivant l'axe vertical z on fait un déplacement de : $2\pi\, b$

$$x(\theta + 2\pi) = x(\theta) \quad ; \quad y(\theta + 2\pi) = y(\theta)$$

$$z(\theta + 2\pi) = b(\theta + 2\pi) = b\theta + 2\pi\, b = z(\theta) + 2\pi\, b$$

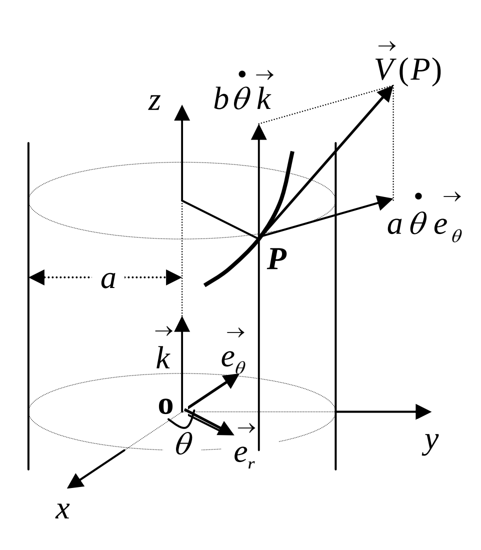
Le vecteur position du point P dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné par :

$$\overrightarrow{OP} = a\,\vec{e}_r + z\,\vec{k} = a\,\vec{e}_r + b\theta\,\vec{k}$$

Les vecteurs vitesse et accélération s'écriront :

$$\vec{V}(P) = a\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + b\dot{\theta}\,\vec{k} = V_\theta\,\vec{e}_\theta + V_z\,\vec{k}$$

$$\vec{\gamma}(P) = -a\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + b\ddot{\theta}\,\vec{k}$$



On remarque que le rapport entre les composantes de la vitesse suivant les vecteurs unitaires $\vec{e}_\theta$ et $\vec{k}$ est indépendant de l'angle θ.

$$\frac{V_z}{V_\theta} = \frac{b\dot{\theta}}{a\dot{\theta}} = \frac{b}{a}$$

Cette expression traduit le fait que toute tangente en un point P de l'hélice fait un angle constant avec la verticale passant par le point P et parallèle au vecteur $\vec{k}$. Le mouvement hélicoïdal est uniforme si la vitesse angulaire de rotation est constante, donc indépendante du paramètre temps ($\dot{\theta} = \omega = Cte$).

Dans ce cas la vitesse et l'accélération auront pour expressions :

$\vec{V}(P) = a\omega\,\vec{e}_\theta + b\omega\,\vec{k}$ avec $V(P) = \omega\sqrt{(a^2 + b^2)}$

$\vec{\gamma}(P) = -a\omega^2\,\vec{e}_r$, l'accélération est dirigée vers l'intérieure de la courbure.

On a vu précédemment dans les mouvements curvilignes que l'accélération du point P s'écrivait sous la forme : $\vec{\gamma}(P) = \dfrac{dV}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n}$ où les vecteurs unitaires $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ sont les vecteurs, tangentiel et normal au point P de la courbe.

En appliquant cette relation dans le cas du mouvement hélicoïdal uniforme où $\vec{\tau} = \vec{e}_\theta$ et $\vec{n} = -\vec{e}_r$, sont les vecteurs tangentiel et normal au point P de la courbe nous obtenons :

$\vec{\gamma}(P) = -a\omega^2\,\vec{e}_r = \dfrac{V^2}{\rho}\vec{n} \Rightarrow -a\omega^2\,\vec{e}_r = -\dfrac{V^2}{\rho}\vec{e}_r \Leftrightarrow a\omega^2 = \dfrac{V^2}{\rho}$ en remplaçant la vitesse par son expression on aboutit à : $a\omega^2 = \dfrac{\omega^2(a^2+b^2)}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{(a^2+b^2)}{a} = a + \dfrac{b^2}{a}$

Comme la normale en P est toujours dirigée vers l'intérieur de la courbure, on peut déterminer facilement le centre C de la courbure en écrivant la relation suivante :

$$\overrightarrow{PC} = -\rho\,\vec{e}_r$$

Nous pouvons aussi associer au point P le repère de Frénet $R(P, -\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

7. Mouvements à trajectoires planes

7.1. Définition

Soit O le centre d'un repère cartésien $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe, tel que $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ et P un point en mouvement sur une trajectoire (Γ) dans le plan *(xoy)* de ce repère.

En utilisant les coordonnées polaires (r,θ) le vecteur position du point P s'écrira :

$\overrightarrow{OP} = r\,\vec{e}_r$ avec $r > 0$ avec : $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \Rightarrow \vec{e}_\theta = \dfrac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$; d'où

$\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -\vec{e}_r$ ainsi nous avons : $\vec{k} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$

La vitesse du point P en fonction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ est donnée par :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

L'accélération aura pour expression :

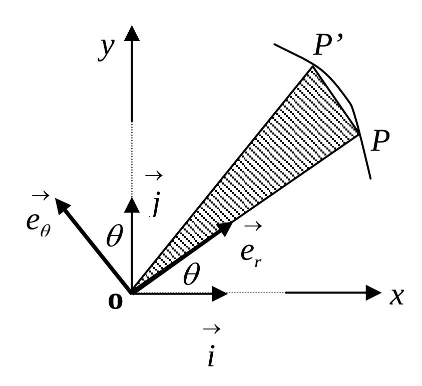
$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = (\dot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Géométriquement, les positions des points P et P' sont infiniment voisines sur la trajectoire.

En passant de P à P' le vecteur position balaie l'aire dS qui est la surface du triangle OPP' :

$$dS = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP} \wedge d\,\overrightarrow{OP}\right| = \frac{1}{2}r.rd\theta = \frac{1}{2}.r^2 d\theta$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps, notée : $\dot{S}$ est appelée vitesse aréolaire.



Elle représente l'aire balayée par unité de temps : $\dot{S} = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$

7.2. Loi des aires

Nous avons vu précédemment que le mouvement du point P étant dans un plan, sa vitesse s'écrivait : $\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$; le produit vectoriel du vecteur déplacement par le vecteur vitesse conduit à la relation suivante :

$$\vec{C} = \overrightarrow{OP} \wedge \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt} = r\,\vec{e}_r \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \right) = r^2 \frac{d\theta}{dt}\vec{k} = r^2\,\dot{\theta}\;\vec{k}$$

On pose : $\vec{C} = C\,\vec{k}$ avec $C = r^2\,\dot{\theta}$, en comparant avec la vitesse aréolaire, on aboutit à la relation suivante : $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2\,\dot{\theta} = \frac{C}{2}$;

$\dot{S} = \frac{C}{2}$; *C : est appelée constante des aires.*

On remarque aussi que la dérivée de la constante des aires est reliée à l'accélération γ_θ, car nous avons : $\dot{C} = d(r^2\,\dot{\theta}) = 2r\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r^2\,\ddot{\theta} = r(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}) = r\gamma_\theta \quad \Rightarrow \quad \gamma_\theta = \frac{\dot{C}}{r}$

7.3. Mouvement à accélération centrale

a) Définition

On dit qu'un point P décrit un mouvement à accélération centrale dans le repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si et seulement si, le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ du point P est colinéaire avec son vecteur accélération $\vec{\gamma}(P)$. Dans ce cas nous pouvons écrire : $\vec{\gamma}(P) = \lambda\;\overrightarrow{OP}$ avec $\lambda \in IR$.

Le mouvement à accélération centrale est un mouvement à trajectoire plane, il résulte de la condition de la colinéarité que donne l'équation : $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\gamma}(P) = \vec{0}$ avec $\vec{\gamma}(P) = \frac{d^2\,\overrightarrow{OP}}{dt^2}$

En dérivant l'expression vectorielle $\overrightarrow{OP} \wedge \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt}$ et en tenant compte de la condition de colinéarité entre le vecteur position et le vecteur accélération, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OP}\wedge\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)=\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\wedge\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}+\overrightarrow{OP}\wedge\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}=\vec{0}$$

ce qui signifie que : $\overrightarrow{OP}\wedge\dfrac{d\overrightarrow{OP}}{dt}=\vec{C}$ est une constante indépendante du temps et appelée constante des aires comme précédemment.

$$\overrightarrow{OP}\wedge\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}=\vec{C}=r^2\dot{\theta}\,\vec{k}\qquad C=r^2\dot{\theta}\quad\Rightarrow\quad\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}$$

b) Expressions des vecteurs, vitesse et accélération, en fonction de la constante des aires

En remplaçant $\dot{\theta}$ en fonction de C dans toute expression, nous avons :

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}\frac{dr}{d\theta}=-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d\dot{r}}{d\theta}\dot{\theta}=\frac{C}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta}=\frac{C}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right)=-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$r\dot{\theta}=\frac{C}{r}\quad\text{et}\quad r\dot{\theta}^2=\frac{C^2}{r^3}$$

En remplaçant ces expressions dans celles des vitesses et accélérations nous obtenons :

$$\vec{V}(P)=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{e}_r+\frac{C}{r}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{V}(P)=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta=\left(-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{C^2}{r^3}\right)\vec{e}_r=-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\vec{e}_r$$

c) Expression de la trajectoire en coordonnées polaires

Nous avons une relation entre l'accélération du point P et le vecteur position, elle est donnée par : $\vec{\gamma}(P) = \lambda\ \overrightarrow{OP}$; en les remplaçant leurs expressions respectives en coordonnées polaires et on obtient :

$$-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r}+\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\vec{e}_r = \lambda\ r\,\vec{e}_r \quad \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\lambda}{C^2}r^3+\frac{1}{r}=0$$

Lorsque la valeur de λ est connue, la résolution de cette équation permet de déterminer l'expression de r en fonction de θ .

On obtient la loi du temps du mouvement à partir de la loi des aires, en effet nous avons :

$$C = r^2\dot{\theta} \iff C = r^2\frac{d\theta}{dt} \quad ; \text{ d'où } dt = \frac{1}{C}r^2 d\theta \quad \text{or } r \text{ est une fonction } \theta : r = f(\theta)$$

$$dt = \frac{1}{C}f(\theta)^2 d\theta \quad \Rightarrow t - t_0 = \frac{1}{C}\int_{\theta_0}^{\theta} f(\theta)^2 d\theta$$

; à partir de cette équation, on reconstruit la trajectoire du point P .

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

1. Représenter les points A et B de coordonnées polaires : $(1,0)$ et $(2,\frac{5\pi}{4})$;

2. Représenter les points C et D de coordonnées cylindriques : $(2,\frac{\pi}{2},2)$ et $(2,\pi-2)$,

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans les repères locaux correspondant.

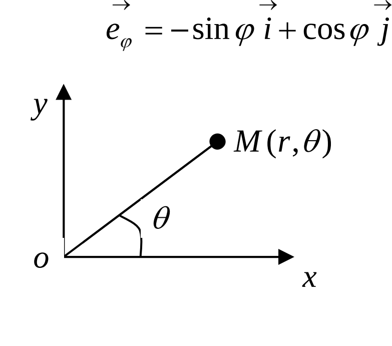
3. Représenter les points E et F de coordonnées sphériques : $(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ et $(1,\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4})$;

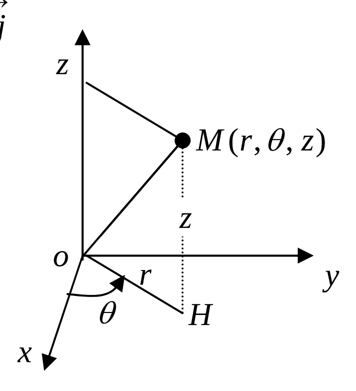
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans le repère local : $(E,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$.

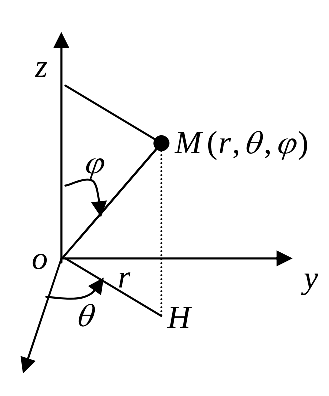
On donne : $\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$







Solution :

1. Les coordonnées polaires : $M(r,\ \theta)$ avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire

$A(1,\ 0) \quad \Rightarrow \quad OA = r = 1$ et $\theta = 0$

$B(2,\ \frac{5\pi}{4}) \quad \Rightarrow \quad OB = r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

2. Les coordonnées cylindriques : $M(r,\ \theta,\ z)$

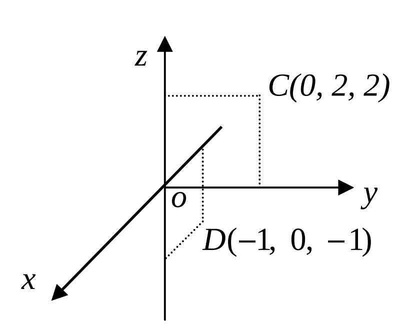
$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}$ où $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire

$C(2,\ \frac{\pi}{2},\ 2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OC} = 2\vec{u}_r + 2\vec{k}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$C(x = 2\cos\frac{\pi}{2}$, $y = 2\sin\frac{\pi}{2}$, $z = 2)$

$D(1,\ \pi,\ -1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OD} = \vec{u}_r - \vec{k}$, $\theta = \pi$

$D(x = 1\cos\pi$, $y = 1\sin\pi$, $z = -1)$



Expressions des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans leurs repères locaux respectifs :

Le $\overrightarrow{OA}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OA}\bullet\vec{u}_r\right)\vec{u}_r + \left(\overrightarrow{OA}\bullet\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(\overrightarrow{OA}\bullet\vec{k}\right)\vec{k}$

Dans le repère local : $(A, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\dfrac{\pi}{2}\,\vec{i} + \sin\dfrac{\pi}{2}\,\vec{j} = \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\dfrac{\pi}{2}\,\vec{i} + \cos\dfrac{\pi}{2}\,\vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

d'où : $\overrightarrow{OA} = \left(\overrightarrow{OA}\bullet\vec{j}\right)\vec{u}_r + \left(\overrightarrow{OA}\bullet(-\vec{i})\right)\vec{u}_\theta + \left(\overrightarrow{OA}\bullet\vec{k}\right)\vec{k} = 2\vec{u}_r + 2\vec{k}$

De la même manière pour le vecteur $\overrightarrow{OB}$

Le $\overrightarrow{OB}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OB}\bullet\vec{u}_r\right)\vec{u}_r + \left(\overrightarrow{OB}\bullet\vec{u}_\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(\overrightarrow{OB}\bullet\vec{k}\right)\vec{k}$

Dans le repère local : $(B, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ avec $\theta = \pi$ nous avons :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\pi\,\vec{i} + \sin\pi\,\vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\pi\,\vec{i} + \cos\pi\,\vec{j} = -\vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

d'où : $\overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OB}\bullet(-\vec{i})\right)\vec{u}_r + \left(\overrightarrow{OB}\bullet(-\vec{j})\right)\vec{u}_\theta + \left(\overrightarrow{OB}\bullet\vec{k}\right)\vec{k} = \vec{u}_r - \vec{k}$

3. Les coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$

$E(2,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}) \Rightarrow \overrightarrow{OE}\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$; et $F(2,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{3\pi}{4}) \Rightarrow \overrightarrow{OF}\begin{cases} x = -\sqrt{6}/4 \\ y = \sqrt{6}/4 \\ z = 1/2 \end{cases}$

Expression du vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans le repère local $(E,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ avec : $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ et $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

On donne : $\vec{e}_r=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \vec{e}_r=\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{1}{2}\vec{j}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

$\vec{e}_\theta=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k} \quad\Rightarrow\quad \vec{e}_\theta=\dfrac{1}{2}\vec{i}+\dfrac{1}{2}\vec{j}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$

$\vec{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j} \quad\Rightarrow\quad \vec{e}_\varphi=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

nous avons : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=-(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+1)\,\vec{i}+(\dfrac{\sqrt{6}}{4}-1)\,\vec{j}+(\dfrac{1}{2}-\sqrt{2})\,\vec{k}$

$$\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{EF}\bullet\vec{e}_r\right)\vec{e}_r+\left(\overrightarrow{EF}\bullet\vec{e}_\theta)\right)\vec{e}_\theta+\left(\overrightarrow{EF}\bullet\vec{e}_\varphi\right)\vec{e}_\varphi$$

En développant cette expression on abouti a : $\overrightarrow{EF}=(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2)\,\vec{e}_r-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\vec{e}_\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_\varphi$

Exercice 02 :

Un point matériel se déplace sur une trajectoire décrite par les équations paramétriques suivantes : $\begin{cases} x=t \\ y=2t^2 \\ z=0 \end{cases}$; Déterminer :

1. Le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire ;
2. Le rayon de courbure ρ ;
3. La normale $\vec{n}$ à la trajectoire ;
4. La binormale $\vec{b}$;

Solution :

1. Vecteur unitaire $\vec{\tau}$ tangent à la trajectoire

$\vec{\tau}$ a la même direction et le sens que le vecteur vitesse. $\vec{\tau}=\dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$.

La vitesse s'écrit : $\vec{v} = \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = 4t \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + 4t\,\vec{j}$ et $\vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = 4 \\ \gamma_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 4$

$$\text{et } \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{1+16t^2}$$

On déduit : $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{\vec{i} + 4t\,\vec{j}}{\sqrt{1+16t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+16t^2}}\vec{i} + \dfrac{4t}{\sqrt{1+16t^2}}\vec{j}$

2. Le rayon de courbure ρ ;

Dans la base de Frênet , l'accélération du point matériel est égale s'écrit : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_N + \vec{\gamma}_t$

Où $\vec{\gamma}_N$ *et* $\vec{\gamma}_t$ sont respectivement l'accélération normale et tangentielle.

Or nous savons que : $\gamma_N = \dfrac{v^2}{\rho}$, calculons γ_N :

Comme $\gamma_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}32t\left(1+16t^2\right)^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{16t}{\sqrt{1+16t^2}}$ et que $\gamma^2 = \gamma_N^2 + \gamma_t^2$

On déduit : $\gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 = 16 - \dfrac{(16t)^2}{1+16t^2} = \dfrac{16}{1+16t^2} \Rightarrow \gamma_N = \dfrac{16}{\sqrt{1+16t^2}}$

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{1+16t^2}{\dfrac{4}{\sqrt{1+16t^2}}} = \frac{\left(1+16t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4}$$

3. La normale $\vec{n}$ à la trajectoire

Soit s l'abscisse curviligne, la normale à la trajectoire est donnée par la relation :

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}.\frac{ds}{d\theta} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho\frac{d\vec{\tau}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\rho}{v}\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad \text{car} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{n} = \frac{\rho}{v}\left(\frac{4\vec{j}(1+16t^2)^{\frac{1}{2}} - (\vec{i}+4t\,\vec{j})16(1+16t^2)^{-\frac{1}{2}}}{1+16t^2}\right) = \frac{\rho}{v}\frac{4(-4\,\vec{i}+\vec{j})}{(1+16t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+16t^2)^{\frac{3}{2}}}{4(1+16t^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{4(-4\,\vec{i}+\vec{j})}{(1+16t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où : $\vec{n} = \dfrac{-4t}{\sqrt{1+16^{t2}}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1+16^{t2}}}\vec{j}$

4. La binormale

C'est un vecteur unitaire perpendiculaire au deux premiers, d'où : $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{(1+16t^2)} \\ \dfrac{4t}{(1+16t^2)} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{-4t}{(1+16t^2)} \\ \dfrac{1}{(1+16t^2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 03 :

Un mobile se déplace à vitesse scalaire constante sur une trajectoire d'écrite par des équations paramétriques en coordonnées cylindriques :

$z = k\,r$

$r = r_0\, e^{c\varphi}$, où $k,\ r_0,\ c$: sont des constantes positives.

1. Trouver l'équation horaire $r(t)$ sachant qu'à : $t = 0 \Rightarrow \varphi = 0$;
2. Déterminer le vecteur accélération et le rayon de courbure de la trajectoire.

Solution :

1. Equation horaire

La vitesse du mobile en coordonnées cylindriques est données par :

$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi + \vec{v}_z = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}$ on déduit les composantes de la vitesse:

$$v_r = r_0\,\dot{\varphi}\,c\,.e^{c\varphi} = c\,\dot{\varphi}.r \quad ; \quad v_\varphi = r\,\dot{\varphi} \quad ; \quad v_z = k\,\dot{r} = kr_0\,\dot{\varphi}\,c\,.e^{c\varphi} = kc\,\dot{\varphi}.r$$

on abouti finalement à : $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{c^2\,\dot{\varphi}^2\,r^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 + k^2c^2\,\dot{\varphi}^2\,.r^2}$

$v = r\,\dot{\varphi}\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)}$ comme la vitesse étant constante : $v = v_0 = Cte$

$v_0 = r\,\dot{\varphi}\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)}$, or nous savons que : $\dot{\varphi} = \dfrac{d\varphi}{dt}$ et que : $\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)} = K$

$v_0 = r\dfrac{d\varphi}{dt}.K$ on remplace r par son expression : $v_0 = r_0 e^{c\varphi}\dfrac{d\varphi}{dt}.K \quad \Leftrightarrow \quad e^{c\varphi}d\varphi = \dfrac{v_0}{Kr_0}dt$

on intègre cette expression par rapport au temps et on obtient :

$$\int_0^{\varphi} e^{c\varphi} d\varphi = \frac{v_0}{Kr_0} dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} e^{c\varphi} = \frac{v_0}{Kr_0} t + A$$

sachant qu'à $t = 0$ $\varphi = 0$, alors : $A = \frac{1}{c}$; ce qui donne : $\frac{1}{c} e^{c\varphi} = \frac{v_0}{Kr_0} t + \frac{1}{c}$

$$e^{c\varphi} = \frac{cv_0}{Kr_0} t + 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_0 e^{c\varphi} = \frac{cv_0}{K} t + r_0$$ on sait que $r(t) = r_0 e^{c\varphi}$ d'où : $r(t) = \frac{cv_0}{K} t + r_0$

2. Vecteur accélération

En coordonnées cylindriques l'expression du vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_{\varphi} + \ddot{z}\vec{k}$$

on sait que : $\dot{\varphi} = Cte \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$; $v = Cte \Rightarrow \ddot{r} = 0$

l'accélération devient : $\vec{\gamma} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_{\varphi}$

$$\vec{\gamma} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + 2r_0 c\dot{\varphi} e^{c\varphi} \dot{\varphi}\vec{e}_{\varphi} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r + 2c\dot{\varphi}^2 r\vec{e}_{\varphi}$$

Le rayon de courbure se déduit à partir de la relation : $\omega = \frac{v}{\rho}$ comme $\omega = \dot{\varphi}$ alors :

$$\rho = \frac{v}{\dot{\varphi}} = \frac{r\dot{\varphi}\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)}}{\dot{\varphi}} = r\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)} \quad ; \quad \rho = r\sqrt{1 + c^2(1 + +k^2)}$$

Exercice 04 :

Un mobile supposé ponctuel, décrit la courbe plane dont l'équation en coordonnées polaire (ρ, θ) est donnée par : $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1 + \cos\theta)$ où ρ_0 : constant désigne une longueur donnée.

1. Quelle est l'allure de la trajectoire du mobile ?
   a. Précisez les positions des points d'intersection de cette trajectoire avec les axes cartésiens *ox* et *oy* ;
   b. Exprimer en fonction de θ , l'abscisse curviligne s du mobile, compté à partir du point A qui correspond à $\theta = 0$;
   c. Pour quel angle polaire nous avons $s = \rho_0$, on notera par *B* la position correspondante

d. En déduire le périmètre de cette trajectoire fermée étudiée ici.

2. On choisira comme origine des temps, l'instant où le mobile est au point A . On admet que la trajectoire est décrite avec une vitesse angulaire ω constante.

a. Exprimer la vitesse linéaire du mobile en fonction du temps puis en fonction de ρ ;

b. Déterminer les composantes d'accélération radiale γ_ρ et orthoradiale γ_θ ; en déduire l'accélération γ du mobile en fonction du temps ;

c. En utilisant les expressions de γ_ρ et γ_θ , déterminer l'accélération normale γ_N à l'instant t ;

d. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction de θ ; Retrouver ce résultat directement.

Solution :

a) Tracé de la courbe et intersection avec les axes

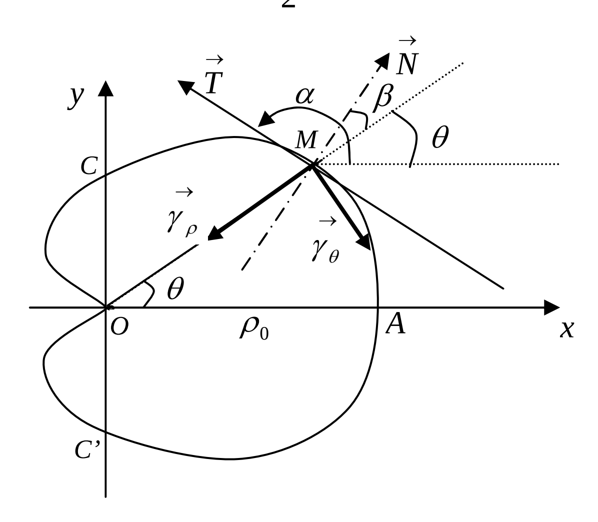
La trajectoire dont l'équation en coordonnées polaire s'écrit $\rho = \frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)$ est une courbe fermée appelé cardoïde. L'axe Ox est un axe de symétrie car : $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$

Pour : $\theta = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 = OA$; $\theta = \pi \Rightarrow \rho = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{2} = OC \quad ; \quad \theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{2} = OC'$$

La courbe coupe l'axe Ox en O et A avec $OA = \rho_0$

La courbe coupe l'axe Oy en C et C' avec $OC = OC' = \frac{\rho_0}{2}$



b) L'abscisse curviligne S en fonction de θ

Les composantes du point M en coordonnées polaires sont : $M\begin{cases}\rho\\ \theta\end{cases}$ et les variations de longueur par : $d\rho$ et $\rho d\theta$. S étant l'abscisse curviligne nous aurons alors :

$$(dS)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad dS = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2}$$

comme : $d\rho = -\frac{1}{2}\rho_0 \sin\theta d\theta$ on déduit facilement :

$$dS = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\rho_0 \sin\theta d\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta d\theta)\right)^2} = \frac{1}{2}\rho_0 d\theta\sqrt{(\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2}$$

$dS = \frac{1}{2}\rho_0 d\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)}$; or nous savons que : $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

on déduit finalement : $dS = \rho_0 \cos\frac{\theta}{2} d\theta$

on obtient l'abscisse curviligne par intégration de cette relation :

$$S = \rho_0 \int \cos\frac{\theta}{2} d\theta = 2\rho_0 \sin\frac{\theta}{2} + S_0$$

Les conditions initiales impose qu'au point A $(\theta = 0)$ alors $S_0 = 0$

La relation entre S et θ devient : $S = 2\rho_0 \sin\frac{\theta}{2}$

c) Angle polaire pour lequel $S = \rho_0$

Soit B le point pour lequel nous avons : $S = \overset{\frown}{AB} = \rho_0$

$$S = \rho_0 \quad \Rightarrow 2\sin\frac{\theta}{2} = 1 \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

d) Périmètre de la trajectoire fermée

Soit P le périmètre de cette trajectoire. Le demi périmètre est donné par :

$$\frac{P}{2} = \overset{\frown}{AO} = \int_A^O ds = \rho_0 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{2} = 2\rho_0 \sin\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{\pi} = 2\rho_0$$

d'où : $P = 4\rho_0$ périmètre de la cardioïde.

2. Vitesse linéaire instantanée du mobile

a.1 Vitesse linéaire en fonction du temps

L'origine des temps est prise au point ***A*** et la vitesse angulaire ω est constante donc :

$\theta = \omega t$. La vitesse est donnée par la relation : $v = \dfrac{dS}{dt}$ or nous avons : $dS = \rho_0 \cos\dfrac{\theta}{2} d\theta$

$$v = \frac{dS}{dt} = \rho_0 \cos\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dt} = \rho_0 \cos\frac{\theta}{2}\frac{d\theta}{dt} = \rho_0 \omega \cos\frac{\omega t}{2}$$

Ce résultat peut être obtenu d'une autre manière en déterminant les composantes radiales et orthoradiale de la vitesse. En effet nous savons que : $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$

La vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

Avec : $\dot{\rho} = -\dfrac{1}{2}\rho_0 \omega \sin\omega t$ et $\rho\dot{\theta} = \dfrac{1}{2}\rho_0\omega(1+\cos\omega t)$

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega\sqrt{\sin^2\omega t + (1+\cos^2\omega t)^2}$$

$$v = \frac{1}{2}\rho_0\omega\sqrt{2(1+\cos\omega t)} = \frac{1}{2}\rho_0\omega\sqrt{2(2\cos^2\frac{\omega t}{2})} = \rho_0\omega\cos\frac{\omega t}{2}$$

a.2 Vitesse linéaire en fonction de ρ

L'équation de la cardioïde qui s'écrit : $\rho = \dfrac{1}{2}\rho_0(1+\cos\theta)$ peut aussi s'écrire :

$$\rho = \rho_0\cos^2\frac{\theta}{2} = \rho_0\cos^2\frac{\omega t}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\frac{\omega t}{2} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Or l'expression de la vitesse en fonction du temps est : $v = \rho_0\omega\cos\dfrac{\omega t}{2} = \rho_0\omega\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ce qui donne : $v = \omega\sqrt{\rho\,\rho_0}$

b. Les composantes de l'accélération : radiale γ_ρ et otrhoradiale γ_θ

nous avons : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ on déduit :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \ddot{\theta} = 0 \quad \text{car} \quad \dot{\theta} = \omega = Cte$$

$$\gamma_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2\cos\omega t - \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1+\cos\omega t) = -\frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1+2\cos\omega t)$$

$$\gamma_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 2\left(-\frac{1}{2}\rho_0\omega\sin\omega t\right)\omega = -\rho_0\omega^2\sin\omega t$$

L'accélération γ du mobile se calcul par :

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\sqrt{(1+2\cos\omega t)^2 + (2\sin\omega t)^2} = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\sqrt{1+4(1+\cos\omega t)}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\sqrt{1+8\cos^2\frac{\omega t}{2}}$$

c. Détermination de l'accélération normale γ_N à partir des accélérations γ_ρ et γ_θ

Nous avons : $\alpha = (\vec{T}, Ox)$ et $\beta = (\vec{N}, \overrightarrow{OM})$, on sait que : $(\vec{N}, \vec{T}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta) = \frac{\pi}{2}$

On projette les deux accélérations sur l'axe portant la normale $\vec{N}$, on obtient :

$$\gamma_N = -\gamma_\rho\cos\beta - \gamma_\theta\sin\beta$$

Exprimons l'angle α et β en fonction de θ :

En coordonnées polaires nous avons : $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ alors :

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d(\rho\sin\theta)}{d(\rho\cos\theta)} = \frac{(1+\cos\theta)\cos\theta - \sin^2\theta}{-(1+\cos\theta)\sin\theta - \sin\theta\cos\theta} = -\frac{\cos\theta + \cos 2\theta}{\sin\theta + \sin 2\theta} = -\cot g\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$tg\alpha = -\cot g\left(\frac{3\theta}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}$$

nous avons aussi géométriquement : $\alpha = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$ on déduit : $\beta = \frac{\theta}{2}$

On remplace β dans l'expression de γ_N, ce qui donne :

$$\gamma_N = -\gamma_\rho\cos\beta - \gamma_\theta\sin\beta = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2(1+2\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} + \rho_0\omega^2\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\gamma_N = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{2}\rho_0\omega^2\cos\frac{\omega t}{2}$$

c. Rayon de courbure

On sait que dans les mouvements curvilignes : $\gamma_N = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{\gamma_N}$

Ce qui donne : $R = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{\rho_0^2 \omega^2 \cos^2 \frac{\omega t}{2}}{\frac{3}{2}\rho_0 \omega^2 \cos \frac{\omega t}{2}} = \frac{2}{3}\rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$

$$R = \frac{2}{3}\rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$$

On peut aussi déduire le rayon de courbure d'une autre manière en sachant que :

$S = 2\rho_0 \sin \frac{\theta}{2}$ et $\alpha = \theta + \beta + \frac{\pi}{2}$

$$R = \frac{dS}{d\alpha} = \frac{\rho_0 \cos \frac{\theta}{2} d\theta}{\frac{3}{2} d\theta} = \frac{2}{3}\rho_0 \cos \frac{\theta}{2}$$

Exercice 05 :

Dans un repère orthonormé $R(O,x,y,z)$ la position d'un point M est déterminé par les équations paramétriques suivantes : $x=\sin\omega t\, e^{\omega t}$; $y=\cos\omega t\, e^{\omega t}$; $z=2\,e^{\omega t}$

Déterminer :

1. Les modules de la vitesse et de l'accélération du point M ;
2. Le rayon de courbure en fonction de z ;
3. Soit H la projection orthogonale du point M sur le plan xoy, quelle est l'équation polaire du point H.

Solution :

1. Vitesse et accélération du point M

$$\vec{V}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\begin{cases}V_x=\omega\, e^{\omega t}(\sin\omega t+\cos\omega t)\\ V_y=\omega\, e^{\omega t}(\cos\omega t-\sin\omega t)\\ V_z=2\omega\, e^{\omega t}\end{cases}$$; on déduit le module de la vitesse par :

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}=\omega\sqrt{6}.e^{\omega t}$$

L'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\begin{cases}\gamma_x=2\omega^2\, e^{\omega t}\cos\omega t\\ \gamma_y=-2\omega^2\, e^{\omega t}\sin\omega t\\ \gamma_z=2\omega^2\, e^{\omega t}\end{cases}$$; on déduit le module de l'accélération par :

$$\gamma=\sqrt{\gamma_x^2+\gamma_y^2+\gamma_z^2}=2\sqrt{2}\omega^2.e^{\omega t}$$

2. Rayon de courbure en fonction de z

Dans la base de Frênet, l'accélération tangentielle est égale à la dérivée du module de la vitesse, ce qui donne : $\gamma_t=\dfrac{dV}{dt}=\omega^2.\sqrt{6}.e^{\omega t}$

L'accélération normale se déduit à partir de la relation : $\gamma^2=\gamma_t^2+\gamma_N^2$

$$\gamma_N^2=\gamma^2-\gamma_t^2=\left(2\sqrt{2}\omega^2.e^{\omega t}\right)^2-\left(\omega^2.\sqrt{6}.e^{\omega t}\right)^2=2\left(\omega^2.e^{\omega t}\right)^2$$

$$\gamma_N=\omega^2\sqrt{2}.e^{\omega t}$$

D'autre part nous avons une relation entre le rayon de courbure et l'accélération normale qui

est donnée par : $\rho = \dfrac{V^2}{\gamma_N}$, ce qui donne : $\rho = \dfrac{\left(\omega\sqrt{6}.e^{\omega t}\right)^2}{\omega^2\sqrt{2}.e^{\omega t}} = 3\sqrt{2}.e^{\omega t}$

Or nous avons : $z = 2.e^{\omega t} \;\Rightarrow\; e^{\omega t} = \dfrac{z}{2}$, ce qui conduit à : $\rho = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.z$

3. Equation polaire du point *H* .

H appartient au plan *(xOy)* ces coordonnées sont données par les équations paramétriques :

$x = \sin\omega t\, e^{\omega t}$; $y = \cos\omega t\, e^{\omega t}$

Les coordonnées polaires du point H sont $(\rho\ ,\ \theta)$ tel que : $\overrightarrow{OH} = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\overrightarrow{OH} = r\,\vec{u}_r$ où $\vec{u}_r$ vecteur unitaire.

Nous avons ainsi : $r = \sqrt{\left(\sin\omega t\, e^{\omega t}\right)^2 + \left(\cos\omega t\, e^{\omega t}\right)^2} = e^{\omega t}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\sin\omega t\, e^{\omega t}}{e^{\omega t}} = \sin\omega t$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\cos\omega t\, e^{\omega t}}{e^{\omega t}} = \cos\omega t$

$\begin{cases} \cos\theta = \sin\omega t \\ \sin\theta = \cos\omega t \end{cases}$ par conséquent ces deux équations nous donne : $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \omega t \;\Leftrightarrow\; \omega t = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

ce qui nous ramène à l'équation polaire du point *H* : $r = e^{\frac{\pi}{2} - \theta}$

Exercice 06 :

Soit *M* un point repéré dans le plan *(xoy)* par les équations paramétriques suivantes :

$x = 4t^2 - 1$ et $y = 2\sqrt{2}.t$ Déterminer :

1. Le vecteur vitesse du point *M* en fonction du temps ainsi que son module ;
2. Le vecteur accélération du point *M* en fonction du temps ainsi que son module ; En déduire les accélérations tangentielle et normale ;
3. Le rayon de courbure de la trajectoire ;
4. On considère que le repère cartésien et le repère polaire ont la même origine et que l'angle θ est repéré par rapport à l'axe *ox*. Calculer les vitesses, radiale, orthoradiale et angulaire.

Solution :

1. Vitesse et accélération du point M

$$\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} V_x = 8t \\ V_y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$; on déduit le module de la vitesse par :

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 2\sqrt{2}.\sqrt{8t^2 + 1}$$

2. Accélération du point γ M ainsi que γ_t et γ_N

L'accélération est donnée par : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \begin{cases} \gamma_x = 8 \\ \gamma_y = 0 \end{cases}$; d'où : $\underline{\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = 8}$

Dans la base de Frênet nous avons : $\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_N^2$ avec : $\gamma_t = \dfrac{dV}{dt}$

$$\gamma_t = 2\sqrt{2}\,\frac{d\left(\left(8t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{dt} = 2\sqrt{2}.\frac{1}{2}16t\left(8t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{16t\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2+1}}$$

comme nous avons : $\gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2$

$$\gamma_N^2 = 8^2 - \left(\frac{16t\sqrt{2}}{\sqrt{8t^2+1}}\right)^2 = 64 - \frac{512t^2}{8t^2+1} = \frac{64}{8t^2+1} \Leftrightarrow \underline{\gamma_N = \frac{8}{\sqrt{8t^2+1}}}$$

3. Rayon de courbure de la trajectoire

il est donné par la relation : $\rho = \dfrac{V^2}{\gamma_N}$

d'où : $\rho = \dfrac{8.\left(8t^2+1\right)\sqrt{8t^2+1}}{8} = \left(8t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$

4. Vitesses : radiale, orthoradiale et angulaire

a. Vitesse radiale

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{d(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{dt}$$ car $r = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$V_r = \frac{d\left(\sqrt{\left(4t^2-1\right)^2 + 8t^2}\right)}{dt} = \frac{d\left(16t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{1}{2}64t^3\left(16t^4+1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{32t^3}{\sqrt{16t^4+1}}$$

b. Vitesse orthoradiale

Nous avons la relation : $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 \quad \Rightarrow \quad V_\theta^2 = V^2 - V_r^2$

$$V_\theta^2 = 8.\left(8t^2+1\right) - \left(\frac{32t^3}{\sqrt{16t^4+1}}\right)^2 = 64t^2 + 8 - \frac{1024t^6}{16t^4+1} = \frac{64t^2+128t^4+8}{16t^4+1}$$

$$V_\theta = \pm\ 2\sqrt{2}\,\frac{4t^2+1}{\sqrt{16t^4+1}}$$

on voit dans cette expression que la vitesse radiale est continue et ne s'annule jamais alors elle ne change par de signe. En coordonnées polaires nous avons : $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$

nous avons ainsi pour $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = -1 \end{cases}$ d'où : $\theta = \pi$

au même instant $t = 0$ nous avons : $\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Ces deux conditions nous conduisent à la situation suivante :

Pour $t = 0 \Rightarrow \theta = \pi$

On voit que pour $t = 0$ la vitesse radial V_θ est négative et comme elle ne change pas, elle le restera et par conséquent elle aura pour expression : $V_\theta = -2\sqrt{2}\,\dfrac{4t^2+1}{\sqrt{16t^4+1}}$

c. Vitesse angulaire

Nous savons que : $V_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{V_\theta}{r} = \dfrac{-2\sqrt{2}\,\dfrac{4t^2+1}{\sqrt{16t^4+1}}}{\sqrt{16t^4+1}} = -2\sqrt{2}\,\dfrac{4t^2+1}{16t^4+1}$

Exercice 07 :

Soit $R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct fixe. Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\psi}$$

1. Vérifier que $\dfrac{d\vec{v}}{d\psi} = -\vec{u}$ et que la base formé par les vecteurs unitaires $(\vec{u},\vec{v},\vec{k})$ est orthogonale directe ;
2. Soit (C) une courbe décrite par le point M dont l'équation paramétrique est donnée par : $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{u} + b\,\psi\,\vec{k}$ où a et b sont des constantes et ψ le paramètre de représentation.

   a) Calculer $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi}$ en fonction de $(a,b,\vec{v},\vec{k})$;

   b) En déduire $\dfrac{ds}{d\psi}$ en fonction de $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, s étant l'abscisse curviligne ;

   c) Déterminer $\vec{\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}/d\psi}{\left\| d\overrightarrow{OM}/d\psi \right\|}$, vecteur unitaire tangent à la courbe au point M en fonction de $(a,b,\vec{v},\vec{k})$;

   d) En déduire que l'angle α compris entre les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{k}$ est constant

3. Exprimer $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ en fonction de α, c et $\vec{u}$. En déduire $\vec{n}$ ainsi que la courbure $\dfrac{1}{R}$;
4. Déterminer la binormale $\vec{b}$ au point M . En déduire l'expression de la torsion $\dfrac{1}{T}$ sachant que : $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{T}$, vérifier que le rapport $\dfrac{T}{R}$ est constant.

Solution :

1. Nous avons : $\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$, alors : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{u}}{d\psi} = -\sin\psi\,\vec{i} + \cos\psi\,\vec{j}$

d'où : $\dfrac{d\vec{v}}{d\psi} = -\cos\psi\,\vec{i} - \sin\psi\,\vec{j} = -\vec{u}$

La base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$ est directe si : $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{k}_0$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{k}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\sin\psi\\ \cos\psi\\ 0\end{pmatrix} = (\cos^2\psi + \sin^2\psi)\vec{k}_0 = \vec{k}_0$$

2. Calcul de $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi}$ en fonction de $(a,b,\vec{v},\vec{k})$ sachant que : $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{u} + b\,\psi\,\vec{k}$

a) $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi} = a\dfrac{d\vec{u}}{d\psi} + b\,\vec{k}_0$

b) $\dfrac{ds}{d\psi} = \left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi}\right\| = \sqrt{a^2+b^2} = c^2$

c) on déduit : $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{V}(M)}{\left\|\vec{V}(M)\right\|} = \dfrac{\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|} = \dfrac{\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi}\cdot\dfrac{d\psi}{dt}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\psi}\cdot\dfrac{d\psi}{dt}\right\|} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}/d\psi}{\left\|d\overrightarrow{OM}/d\psi\right\|} = \dfrac{a\,\vec{v} + b\,\vec{k}_0}{c}$

$$\vec{\tau} = \frac{a}{c}\vec{v} + \frac{b}{c}\vec{k}_0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\tau}\right\| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c} = \frac{c}{c} = 1$$

d) $\alpha = (\vec{\tau},\vec{k}_0)$ **constant**

pour le montrer on utilise le produit scalaire : $\vec{\tau}\bullet\vec{k}_0 = \left\|\vec{\tau}\right\|\,\left\|\vec{k}_0\right\|\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{b}{c} = \cos\alpha$

comme b et c sont des constantes alors α est constant.

On peut exprimer le vecteur unitaire sous la forme : $\vec{\tau} = \sin\alpha\,\vec{v} + \cos\alpha\,\vec{k}_0$

3. Expression de $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ en fonction de α, c et $\vec{u}$.

$\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{d\vec{\tau}}{d\psi}\dfrac{d\psi}{ds}$ or nous avons : $\dfrac{ds}{d\psi} = \dfrac{1}{c} \Rightarrow \dfrac{d\psi}{ds} = c$ et $\dfrac{d\vec{\tau}}{d\psi} = -\sin\alpha\,\vec{u}$

on obtient ainsi : $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = -\dfrac{\sin\alpha}{c}\vec{u}$

Détermination de la normale $\vec{n}$ ainsi que la courbure $\dfrac{1}{R}$;

Nous savons que : $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R}$ et par analogie avec l'expression précédente : $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = -\dfrac{\sin\alpha}{c}\vec{u}$

On déduit que : $\begin{cases} \dfrac{1}{R} = \dfrac{\sin\alpha}{c} \\ \vec{n} = -\vec{u} \end{cases}$ on le vérifie facilement pat le produit scalaire : $\vec{\tau} \bullet \vec{n} = 0$

En effet : $\left(\sin\alpha\,\vec{v} + \cos\alpha\,\vec{k_0}\right) \bullet \vec{n} = 0$

4. La binormale $\vec{b}$ au point M

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = -\cos\alpha\,\vec{v} + \sin\alpha\,\vec{k_0}$$

Expression de la torsion sachant que : $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{T}$

$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{T} = -\dfrac{\vec{u}}{T}$ or nous avons : $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d\vec{b}}{d\psi}.\dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{\cos\alpha}{c}\vec{u}$ les deux expressions nous donnent : $\dfrac{1}{T} = -\dfrac{\cos\alpha}{c}$

De là on vérifie facilement que le rapport : $\dfrac{T}{R} = \dfrac{-c/\cos\alpha}{c/\sin\alpha} = -tg\alpha$

Exercice 08 :

Un bateau schématisé par un point mobile M se déplace à une vitesse constante $\vec{V}$ par rapport à l'eau d'une rivière. L'eau de la rivière se déplace à une vitesse $\vec{U}$ constante par rapport aux berges tel $\vec{U} = U\,\vec{i}$, avec $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère fixe.

Le mouvement du point M est tel que à chaque instant le vecteur vitesse $\vec{V}$ est orthogonale au vecteur déplacement $\overrightarrow{OM}$. On posera $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$

1. Donner l'expression de la vitesse du point M en fonction de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$;

a) Exprimer les composantes de la vitesse dans la base $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k})$;

b) Donner l'expression générale de la vitesse en coordonnées polaires.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire du bateau par rapport au repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en coordonnées polaires $r = f(\theta)$, sachant qu'à $t=0$: $\theta=0$ et $r=r_0$;

a) Mettre l'expression de la trajectoire sous la forme : $r = \dfrac{p}{1-k\sin\theta}$;

b) Préciser les expressions de p et k, puis donner la nature de la trajectoire.

3. Déterminer l'accélération du bateau dans la base $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{k})$

a) Donner l'expression générale de l'accélération en coordonnées polaires ;

b) En déduire que l'expression $r^2\dfrac{d\theta}{dt}$ est une constante et donner sa valeur

c) Calculer la durée de révolution du bateau autour du point O. on donne :

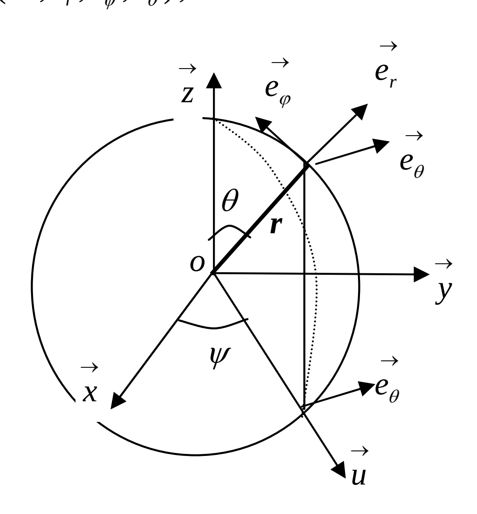
$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1-k\sin\theta)^2} = \frac{2\pi}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 09 :

Soit $R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct fixe et $R_s(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\psi,\vec{e}_\theta)$ un repère local sphérique lié au point M. $\overrightarrow{OP} = OP.\vec{e}_r = r\,\vec{e}_r$

$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i} + \sin\psi\,\vec{j}$, $\vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{u} + \cos\theta\,\vec{k}$, $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\psi} = \vec{e}_\psi$ et $\vec{e}_\psi = \cos\theta\,\vec{u} - \sin\theta\,\vec{k}$

Exprimer dans le repère $R_s(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\psi,\vec{e}_\theta)$, la vitesse et l'accélération du point M.



Exercice 10 :

Les coordonnées d'un point M , en mouvement dans un plan sont données par :

$x = a(1+\cos t)$ et $y = b\sin t$, t : représente le temps , a et b sont deux constantes positives.

1. Donner l'équation de la trajectoire du point M , quelle est sa nature ?
2. Exprimer la vitesse du point M. Existe-t-il des instants tel que le module V de la vitesse soit égale à une grandeur $\lambda \succ 0$ donnée ? discuter les solutions.
3. Le vecteur vitesse peut-il être normal au vecteur accélération ?
4. Représenter graphiquement ces vecteurs sur la courbe.

Solution :

1. Equation et nature de la trajectoire

L'équation cartésienne de la trajectoire s'obtient en éliminant le paramètre temps des équations paramétriques.

$\frac{x}{a} - 1 = \cos t$ et $\frac{y}{b} = \sin t$ en utilisant la règle trigonométrique : $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ on aboutit à : $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

on pose : $x - a = X$ et $y = Y$ l'expression devient :

$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ c'est l'équation décentrée suivant l'axe *(Ox)* , d'une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b .

2. Vitesse du point M

Nous avons : $\vec{V} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = -a\sin t \\ V_y = \frac{dy}{dt} = b\cos t \end{cases}$

D'où : $V^2 = V_x^2 + V_y^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t = b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t$

$$V = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t}$$

On doit chercher s'il existe un instant t tel que : $V = \lambda$ avec $\lambda \succ 0$

$$\lambda^2 = b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \sin^2 t \quad \sin t = \pm\sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2}{a^2 - b^2}}$$

or on sait que la valeur du sinus est comprise entre 0 et 1, cela revient à discuter la double inégalité : $0 \le \frac{\lambda^2 - b^2}{a^2 - b^2} \le 1$ qui se traduit par deux équations :

$\lambda^2 - b^2 \ge 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda \ge b$

$\lambda^2 - b^2 \le a^2 - b^2 \qquad \Rightarrow \quad \lambda \le a$

Il existe bien des instants t tel que $V = \lambda$ a condition que : $a \le \lambda \le b$

3. Les vecteurs vitesse $\vec{V}$ et accélération $\vec{\gamma}$:

S'ils sont perpendiculaires ($\vec{V} \perp \vec{\gamma}$) alors leur produit scalaire est nul. $\vec{V} \bullet \vec{\gamma} = 0$

Calculons le vecteurs accélération : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{cases} \gamma_x = -a\cos t \\ \gamma_y = -b\sin t \end{cases}$

Si $\vec{V} \bullet \vec{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x\gamma_x + V_y\gamma_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \sin t\cos t - b^2 \sin t\cos t = 0$

$(a^2 - b^2)\sin t\cos t = 0$ qui s'écrit aussi sous la forme : $(a^2 - b^2)\sin 2t = 0$

comme nous avons : $a \succ b$ alors $\sin 2t = 0$ ce qui se traduit par :

$$2t = m\pi \quad \Rightarrow \quad t = m\frac{\pi}{2} \qquad \text{avec} \quad m \in IN$$

4. Représentation graphique des vecteurs

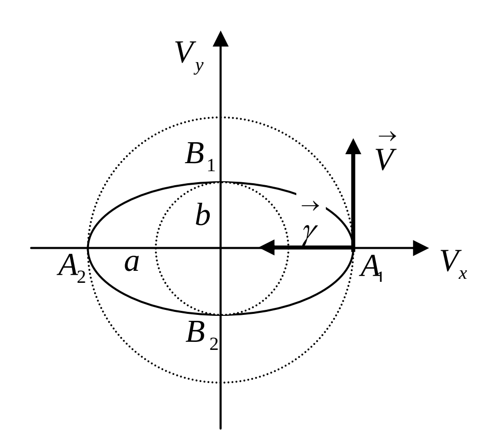
Représentons l'hodographe du mouvement et traçons sur la courbe les deux vecteurs dans les positions où ils sont perpendiculaires.

En effet nous avons : $\left(\frac{V_x}{a}\right)^2 = \sin^2 t$ et $\left(\frac{V_y}{b}\right)^2 = \cos^2 t$

Ce qui donne : $\left(\frac{V_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{V_{yx}}{b}\right)^2 = 1$ c'est l'équation d'une ellipse de demi axe a et b respectivement sur l'axe Ox et Oy.

On trace deux cercles : l'un de rayon $\lambda = a$ et l'autre de rayon $\lambda = b$ car $a \le \lambda \le b$
Et l'intersection de ces deux cercles avec l'hodographe des vitesses donne les quatre points donc les instants où la vitesse est perpendiculaire à l'accélération.

On voit bien que $\vec{V} \perp \vec{\gamma}$ aux points A_1, A_2 sur l'axe *(Ox)* et B_1, B_2 sur l'axe *(Oy)* qui correspondent aux instants $t = m\dfrac{\pi}{2}$ avec $m \in IN$



CHAPITRE VI

CINEMATIQUE DU SOLIDE

CINEMATIQUE DU SOLIDE

1. Généralités

Un solide est dit indéformable, si la distance entre deux points de celui-ci reste constante et invariable au court du temps : $d\left[A(t), B(t)\right] = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = Cte$

La mécanique des solides permet d'étudier le comportement des solides et déterminer tous les paramètres cinématiques de l'ensemble de ses points quel que soit la nature du mouvement. La notion de torseur, déjà étudiée dans les chapitres précédents, sera très utile dans la cinématique des solides. La formule de transport permet, connaissant la vitesse d'un seul point du solide de déduire facilement la vitesse de tous les points du solide.

L'objectif de la cinématique du solide est de connaître la position, la vitesse et l'accélération de tous les points du solide par rapport à un repère déterminé.

2. Notion de Repères et Référentiels

Pour étudier le mouvement d'un solide où d'un système composé de plusieurs solides, il est indispensable de repérer la position de chaque point ainsi que les vecteurs cinématiques dans l'espace et le temps.

Nous considérons en cinématique classique que l'espace est Euclidien, à trois dimensions et le temps est absolu et indépendant de l'observateur.

Afin de repérer le solide, l'observateur va définir :

- Un repère d'espace défini par une origine O et une base orthonormée $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Le trièdre $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ défini complètement le repère d'espace dans lequel peuvent être exprimées les coordonnées de tous les points du solide.
- Un repère de temps (appelé aussi échelle de temps) avec une origine et une unité de temps. Dans le système MKSA l'unité de temps est la seconde.

Ces deux repères définissent un repère espace-temps appelé en cinématique classique référentiel ou simplement repère. Nous choisissons ensuite un point O_s quelconque du

solide. La position de ce point est donnée à chaque instant par le vecteur position $\overrightarrow{OO_s}$ exprimé dans le repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Les coordonnées du point O_s dépendent du temps et permettent de connaître à chaque instant la position du repère $R(O_s,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ lié au solide.

Le passage du repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ vers le repère $R(O_s,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ lié au solide est déterminé par la matrice de passage qui exprime les vecteurs unitaires $(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ en fonction des vecteurs unitaires $(\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$. Cette matrice de passage s'exprime en fonction des angles d'Euler que nous verrons dans ce chapitre. L'orientation du repère lié au solide est indépendante du choix du point O_s.

L'ensemble des paramètres de translation et de rotation constituent les paramètres de situation ou degrés de liberté du solide dans l'espace par rapport au repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est égale à 6 (3 rotations et 3 translations) on dit que le solide est complètement libre dans $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Si le nombre de paramètres est inférieur à 6 , on dit que le solide est lié ou soumis à des liaisons, certains paramètres ne varient pas au cours du temps.

3. Systèmes de notations

Dans l'étude de la cinématique nous adoptons la notation suivante :

Soit $R_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et P un point du solide, nous avons :

$\overrightarrow{O_iP}$: vecteur position du point P par rapport au repère R_i ;

$\overrightarrow{V^i}(P)=\dfrac{d^i\,\overrightarrow{O_iP}}{dt}$: vitesse du point P par rapport au repère R_i ;

$\overrightarrow{\gamma^i}(P)=\dfrac{d^i\,\overrightarrow{V_i}(P)}{dt}$: accélération du point P par rapport au repère R_i ;

Les paramètres cinématiques sont toujours liés au repère.

4. Repère d'étude, lié à l'observateur et repère de projection

Les paramètres cinématiques (vecteurs vitesse et accélération) des points du solide sont étudiés dans un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié à l'observateur. Ce repère est appelé repère d'étude.

Les composantes des vecteurs vitesses $\vec{V}^i(P)$ et accélération $\vec{\gamma}^i(P)$ étant mesurés et définis dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ nous pouvons connaître leurs composantes dans n'importe quel repère de l'espace $R_p(O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$ que l'on appellera repère de projection.

Le choix de ce repère de projection permet d'exprimer les paramètres cinématiques avec des expressions mathématiques plus simples. Il est souvent intéressant de choisir le repère de projection différent du repère d'étude afin de simplifier et réduire les calculs. Le repère de projection étant mobile par rapport au repère d'étude, il faut faire attention lors des dérivations que les vecteurs unitaires du repère de projection changent de direction donc il faut en tenir compte.

5. Mouvement d'un repère R_k par rapport à un repère R_i lié à l'observateur

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère lié à l'observateur et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au premier. Tout point de l'espace peut être repéré totalement dans R_k et déduire ses composantes dans R_i où inversement en connaissant le mouvement de R_k par rapport à R_i.

Le mouvement du repère R_k est totalement connu si :

- La position de son centre O_k est totalement connu dans R_i ;
- L'orientation des axes de R_k est connu par rapport à ceux de R_i.
-

5.1. Repérage du centre O_k du repère R_k

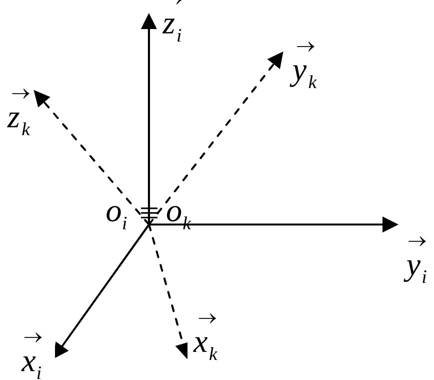
Le repérage du point O_k centre du repère R_k est déterminé par les composantes du vecteur $\overrightarrow{O_iO_k}$ liant les deux centres des repères dans R_i ou R_k, ceci se traduit par les relations suivantes :

Dans R_i : $\begin{cases} \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{x}_i \\ \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{y}_i \\ \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{z}_i \end{cases}_{R_i}$; Dans R_k : $\begin{cases} \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{x}_k \\ \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{y}_k \\ \overrightarrow{O_iO_k} \bullet \vec{z}_k \end{cases}_{R_k}$

5.2 Repérage de l'orientation des axes du repère

Pour repérer l'orientation des axes du repère R_k , on ramène ce repère en O_i de telle sorte que les centres O_i et O_k soient confondues $(O_i \equiv O_k)$.

Le repère R_k est en rotation quelconque par rapport au repère R_i, dans ce cas chacun des vecteurs unitaires $(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ aura des composantes dans le repère R_i ; nous pouvons alors écrire :



$$\vec{x}_i = \alpha_{11}\,\vec{x}_k + \alpha_{12}\,\vec{y}_k + \alpha_{13}\,\vec{z}_k$$

$$\vec{y}_i = \alpha_{21}\,\vec{x}_k + \alpha_{22}\,\vec{y}_k + \alpha_{23}\,\vec{z}_k$$

$$\vec{z}_i = \alpha_{31}\,\vec{x}_k + \alpha_{32}\,\vec{y}_k + \alpha_{33}\,\vec{z}_k$$

Ces trois équations peuvent se mettre sous la forme matricielle, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix}$$

La matrice $[P]$ (3x3) définie par les éléments α_{ij} est appelée matrice de passage du repère R_i au repère R_k . La matrice $[P]$ est orthogonale droite, trois paramètres indépendant permettent de repérer l'orientation du repère R_k. Les paramètres indépendants les plus utilisés pour déterminer l'orientation de la base mobile sont les angles d'Euler que l'on présentera en détail dans ce chapitre. Nous allons d'abord étudier les relations existant entre les deux bases R_i et R_k puis expliciter la formule de la base mobile et ses conséquences.

5.3. Formule de la base mobile

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère mobile par rapport au premier. Les vecteurs unitaires du repère R_k sont orthogonaux entre eux et de module constant et égale à 1, mais ils changent de direction dans l'espace.

$$\left\|\vec{x}_k\right\| = \left\|\vec{y}_k\right\| = \left\|\vec{z}_k\right\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \vec{x}_k . \vec{y}_k = 0\,,\ \vec{x}_k . \vec{z}_k = 0\ ,\ \vec{y}_k . \vec{z}_k = 0$$

Nous allons déterminer les dérivées de ces vecteurs dans le repère R_i :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt},\ \frac{d^i \vec{y}_k}{dt},\ \frac{d^i \vec{z}_k}{dt}$$

Soit $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\theta}(a\,\vec{x}_k + b\,\vec{y}_k + c\,\vec{z}_k)$, le vecteur rotation de la base $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport à la base $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$.

Nous avons alors les relations suivantes :

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \perp \vec{x}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} \in (\vec{y}_k, \vec{z}_k)\ ;\ \text{nous pouvons écrire :}\ \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta} = 0.\vec{x}_k + c\,\vec{y}_k - b\,\vec{z}_k)$$

$$\frac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{x}_k}{d\theta}\frac{d^i\theta}{dt} = (0.\vec{x}_k + c\,\vec{y}_k - b\,\vec{z}_k)\dot{\theta} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \perp \vec{y}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{z}_k)\ ;\ \text{nous pouvons écrire :}\ \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta} = -c\,\vec{x}_k + 0.\vec{y}_k + a\,\vec{z}_k)$$

$$\frac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{y}_k}{d\theta}\frac{d^i\theta}{dt} = (-c\,\vec{x}_k + 0.\vec{y}_k + a\,\vec{z}_k)\dot{\theta} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \perp \vec{z}_k \Rightarrow \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} \in (\vec{x}_k, \vec{y}_k)\ ;\ \text{nous pouvons écrire :}\ \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta} = b\,\vec{x}_k - a\,\vec{y}_k + 0.\vec{z}_k)$$

$$\frac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \frac{d^i \vec{z}_k}{d\theta}\frac{d^i\theta}{dt} = (b\,\vec{x}_k - \vec{y}_k + 0.\vec{z}_k)\dot{\theta} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

Nous avons donc : $\dfrac{d^i \vec{x}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k$; $\dfrac{d^i \vec{y}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k$; $\dfrac{d^i \vec{z}_k}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$

5.4. Dérivée dans le repère R_i d'un vecteur $\vec{V}(t)$ exprimé dans un repère R_k

Le vecteur $\vec{V}(t)$ s'écrira : $\vec{V}(t) = X_k\,\vec{x}_k + Y_k\,\vec{y}_k + Z_k\,\vec{z}_k$ dans le repère R_k .

Sa dérivée dans le repère R_k a pour expression : $\dfrac{d^k\vec{V}(t)}{dt} = \dot{X}_k\,\vec{x}_k + \dot{Y}_k\,\vec{y}_k + \dot{Z}_k\,\vec{z}_k$

Sa dérivée dans le repère R_i s'écrira :

$$\frac{d^i\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{V}(t)}{dt} + X_k\,\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{x}_k + Y_k\,\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{y}_k + Z_k\,\vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{z}_k$$

$$\frac{d^i\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^k\vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(X_k\,\vec{x}_k + Y_k\,\vec{y}_k + Z_k\,\vec{z}_k \right) = \frac{d^k\vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$$

On obtient finalement : $\dfrac{d^i\vec{V}(t)}{dt} = \dfrac{d^k\vec{V}(t)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}(t)$

5.5. Propriétés du vecteur $\vec{\Omega}_k^i$

a) Le vecteur $\vec{\Omega}_k^i$ est antisymétrique par rapport aux indices *i* et *j* : $\vec{\Omega}_k^i = -\vec{\Omega}_i^k$

b) Formule de Chasles : $\vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^j + \vec{\Omega}_j^i$ (principe de composition)

c) $\dfrac{d^i\vec{\Omega}_k^i}{dt} = \dfrac{d^k\vec{\Omega}_k^i}{dt}$ égalité des dérivées par rapport aux indices.

6. Angles d'Euler

6.1 Angles d'Euler de type 1

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère lié au solide *(S)*, en mouvement quelconque dans l'espace. Le centre O_k du repère R_k appartient au solide $O_k \in (S)$.

Dans le cas des angles d'Euler de type 1, on considère que les centres O_i et O_k des deux repères sont confondus : $O_i \equiv O_k$, ce qui signifie que le repère R_k ne fait que des rotations

par rapport au repère R_i. Trois paramètres indépendants sont nécessaires pour définir complètement l'orientation du repère R_k par rapport à celle de R_i.

Le passage du repère R_i vers le repère R_i se fera par trois rotations en utilisant deux repères intermédiaires R_1 et R_2.

6.1.1. Passage du repère R_1 vers le repère R_i : *(précession)*

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z_i} \equiv \vec{z_1}$.

On passe du repère $R_i(O_i, \vec{x_i}, \vec{y_i}, \vec{z_i})$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ en faisant une rotation d'angle ψ : appelé angle de précession. La vitesse de rotation est donnée par : $\vec{\Omega_1^i} = \dot{\psi}\,\vec{z_i} = \dot{\psi}\,\vec{z_1}$ car $\vec{z_i}$ est confondu avec $\vec{z_1}$.

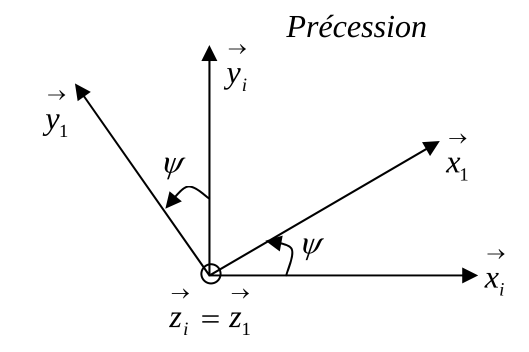
La représentation se fait par des figures planes, à partir desquelles nous construisons les matrices de passage. Nous avons ainsi :

$$\vec{x_1} = \cos\psi\,\vec{x_i} + \sin\psi\,\vec{y_i} + 0.\vec{z_i}$$

$$\vec{y_1} = -\sin\psi\,\vec{x_i} + \cos\psi\,\vec{y_i} + 0.\vec{z_i}$$

$$\vec{z_1} = 0.\vec{x_i} + 0.\vec{y_i} + \vec{z_i}$$

Ces trois équations peuvent être mise sous forme matricielle et nous obtenons:



$\psi = (\vec{x_i}, \vec{x_1}) = (\vec{y_i}, \vec{y_1})$ avec $\vec{z_1} = \vec{x_1} \wedge \vec{y_1}$

$$\begin{pmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{y_1} \\ \vec{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x_i} \\ \vec{y_i} \\ \vec{z_i} \end{pmatrix}$$

$P_{R1\to Ri} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_1 vers le repère R_i.

La matrice de passage de R_i vers R_1 est égale à la transposée de $P_{R1\to Ri}$: $P_{Ri\to R1} = P^T{}_{R1\to Ri}$

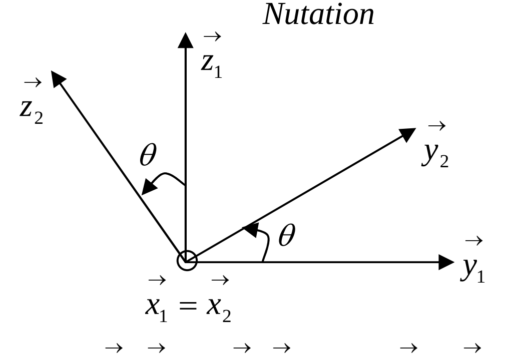
6.1.2. Passage du repère R_2 vers le repère R_1 : *(Nutation)*

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$.

On passe du repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en faisant une rotation d'angle θ : appelé angle de Nutation. La vitesse de rotation est donnée par : $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\theta}\,\vec{x}_1 = \dot{\theta}\,\vec{x}_2$ car $\vec{x}_1$ est confondu avec $\vec{x}_2$.

Nous avons ainsi :

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_i + 0.\vec{y}_1 + 0.\vec{z}_1$$
$$\vec{y}_2 = 0.\vec{x}_1 + \cos\theta\,\vec{y}_1 + \sin\theta\,\vec{z}_i$$
$$\vec{z}_2 = 0.\vec{x}_1 - \sin\theta\,\vec{y}_1 + \cos\theta\,\vec{z}_i$$



$$\theta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) \text{ avec } \vec{x}_2 = \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_2)$$

Sous forme matricielle et nous obtenons:

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$P_{R2\to R1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_2 vers le repère R_1 .

6.1.3. Passage du repère R_k vers le repère R_2 : *(Rotation propre)*

La rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_k$.

On passe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ vers le repère $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en faisant une rotation d'angle φ : appelé angle de Rotation propre. La vitesse de rotation est donnée par : $\vec{\Omega}_k^2 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_k$ car $\vec{z}_2$ est confondu avec $\vec{z}_k$.

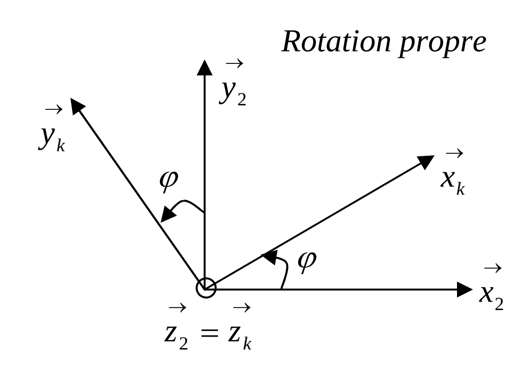
Nous avons ainsi :

$\vec{x}_k = \cos\varphi\, \vec{x}_2 + \sin\varphi\, \vec{y}_2 + 0.\vec{z}_2$

$\vec{y}_k = -\sin\varphi\, \vec{x}_2 + \cos\varphi\, \vec{y}_2 + 0.\vec{z}_2$

$\vec{z}_k = 0.\vec{x}_2 + 0.\vec{y}_2 + \vec{z}_2$

Sous forme matricielle et nous obtenons:



$\varphi = (\vec{x}_2, \vec{x}_k) = (\vec{y}_2, \vec{y}_k)$ avec $\vec{z}_k = \vec{x}_k \wedge \vec{y}_k$

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$P_{Rk\to R2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage du repère R_k vers le repère R_2.

Le passage du repère R_k vers le repère R_i ou inversement se fait par trois rotations successives de telle sorte que tous les axes de R_k occupent des positions différentes de celle de R_i. La matrice de passage de R_k vers R_i est donnée par le produit des trois matrices successives, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_k \\ \vec{y}_k \\ \vec{z}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_i \\ \vec{y}_i \\ \vec{z}_i \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de R_i vers R_k est donnée par la transposée de cette dernière.

Le vecteur rotation instantané du repère R_k par rapport à R_i aura pour expression vectorielle : $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi}\,\vec{z}_i + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\varphi}\,\vec{z}_2$.

Il aura une expression différente selon qu'il soit écrit dans l'un ou l'autre des deux repères.

Dans R_i , nous aurons : $\vec{\Omega}_k^i = \begin{cases} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi + \dot{\psi} \end{cases}_{R_i}$

Dans R_k , nous aurons : $\vec{\Omega}_k^i = \begin{cases} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\psi \end{cases}_{R_k}$

Ce vecteur instantané de rotation permet de déduire la vitesse de tous les points du solide en connaissant la vitesse d'un seul point appartenant au solide.

7. Champs des vitesses et accélérations d'un solide

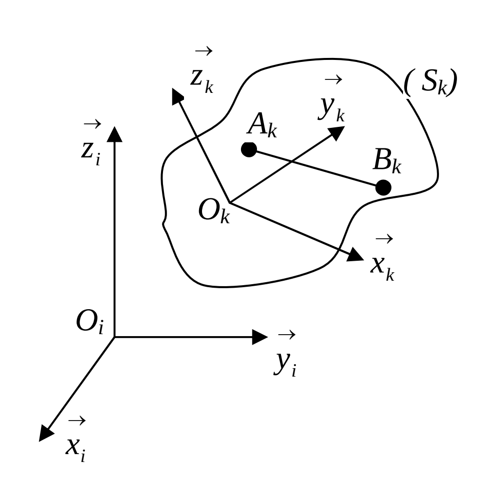
Soit un repère fixe $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ et un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ en mouvement quelconque dans l'espace. Pour tout point su solide (S_k) nous pouvons lui associer son vecteur position, donc son vecteur vitesse et vecteur accélération.

Considérons deux points A_k et B_k appartenant au solide (S_k) , nous allons chercher une relation entre leur vitesse et leur accélération.

7.1. Champs des vitesses

Le solide (S_k) est indéformable, alors la distance $\overrightarrow{A_k B_k} = Cte$ reste constante au cours du temps dans les deux repères.

Ce vecteur s'exprimera de façon différente dans R_i et R_k . Les vitesses des points A_k et B_k sont différentes car le solide a un mouvement quelconque.



Dans le repère R_i nous avons : $\overrightarrow{O_iB_k} = \overrightarrow{O_iA_k} + \overrightarrow{A_kB_k} \Rightarrow \overrightarrow{A_kB_k} = \overrightarrow{O_iB_k} - \overrightarrow{O_iA_k} = Cte$

Dans le repère R_k nous avons : $\overrightarrow{O_kB_k} = \overrightarrow{O_kA_k} + \overrightarrow{A_kB_k} \Rightarrow \overrightarrow{A_kB_k} = \overrightarrow{O_kB_k} - \overrightarrow{O_kA_k} = Cte$

Des deux expressions nous pouvons déduire une relation entre les vitesses des deux points appartenant au solide.

Les vitesses des deux points par rapport au repère R_i sont données par:

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iA_k}}{dt} \qquad \text{et} \qquad \vec{V}^i(B_k) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iB_k}}{dt}$$

Ses deux expressions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iA_k}}{dt} = \frac{d^k\,\overrightarrow{O_iA_k}}{dt} + \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_iA_k} \qquad \ldots\ldots\ldots.\textbf{(1)}$$

$$\vec{V}^i(B_k) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iB_k}}{dt} = \frac{d^k\,\overrightarrow{O_iB_k}}{dt} + \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_iB_k} \qquad \ldots\ldots\ldots.\textbf{(2)}$$

En faisant la différence entre les deux expressions **(2) - (1)** : on aboutit à :

$$\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) = \frac{d^i\left(\overrightarrow{O_iB_k} - d^i\,\overrightarrow{O_iA_k}\right)}{dt} + \vec{\Omega}^i_k \wedge \left(\overrightarrow{O_iB_k} - \overrightarrow{O_iA_k}\right)$$

or on sait que : $\dfrac{d^i\left(\overrightarrow{O_iB_k} - \overrightarrow{O_iA_k}\right)}{dt} = \dfrac{d^i\,\overrightarrow{A_kB_k}}{dt} = 0$ car $\overrightarrow{O_iB_k} - \overrightarrow{O_iA_k} = \overrightarrow{A_kB_k}$

On obtient ainsi la relation de distribution des vitesses dans un solide :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{A_kB_k}$$

Cette relation est d'une grande importance dans la cinématique et la dynamique des solides. Elle permet, à partir de la vitesse d'un point du solide de déduire la vitesse de tous les autres points du solide en connaissant la vitesse de rotation du repère lié à celui-ci.

Remarques :

a) Si le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}^i_k = \vec{0}$, alors le solide est en mouvement de translation pur et tous les points du solide ont la même vitesse : $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k)$;

b) Si $\vec{V}^i(A_k) = \vec{0}$ et $\vec{V}^i(B_k) = \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{A_iB_k}$, on dit que le solide est en mouvement de rotation pur autour du point $A_k \in (S_k)$;

c) Le mouvement quelconque (général) d'un solide peut être décrit comme étant composé d'un mouvement de translation du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse $\vec{V}^i(A_k)$ et d'un mouvement de rotation autour du point $A_k \in (S_k)$ à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$.

7.2. Equiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Nous pouvons le montrer par deux méthodes différentes.

a) Nous avons montré précédemment que $\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$

En multipliant cette expression par le vecteur $\overrightarrow{A_k B_k}$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(B_k) = \overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(A_k) + \overrightarrow{A_k B_k} \bullet \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \right)$$

Par permutation circulaire du produit mixte, nous pouvons facilement voir que l'expression :

$$\overrightarrow{A_k B_k} \bullet \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \right) = \vec{\Omega}_k^i \bullet \left(\overrightarrow{A_k B_k} \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \right) = \vec{0}$$

On obtient ainsi l'égalité : $\overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(B_k) = \overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(A_k)$

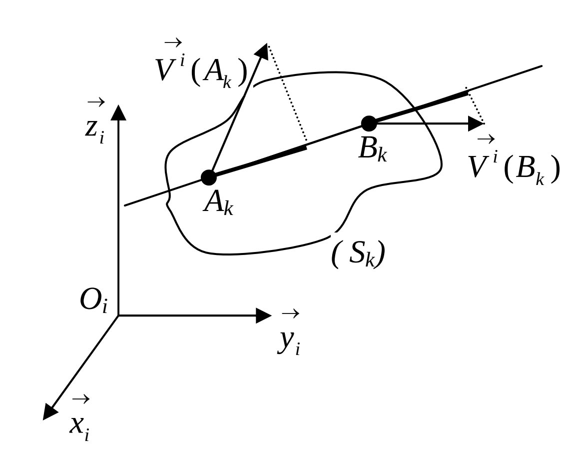
(propriété d 'équiprojectivité du champ des vitesses du solide)

b) Cette expression peut être retrouvée d'une autre façon.

Le solide (S_k) est indéformable et la distance $\overrightarrow{A_k B_k}$ est constante alors :

$$\frac{d\left(\overrightarrow{A_k B_k}\right)^2}{dt} = 0$$

$$\frac{d\left(\overrightarrow{A_k B_k}\right)^2}{dt} = 2\,\overrightarrow{A_k B_k}\,\frac{d\,\overrightarrow{A_k B_k}}{dt} = 0$$



$$2\,\overrightarrow{A_k B_k} \bullet \left(\vec{V}^i(B_k) - \vec{V}^i(A_k) \right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(B_k) = \overrightarrow{A_k B_k} \bullet \vec{V}^i(A_k)$$

Cette propriété d'équiprojectivité entraîne l'existence d'un vecteur libre $\vec{\Omega}_k^i$ tel que :

$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$, ce qui permet d'introduire la notion de torseur cinématique.

7.3. Champs des accélérations

Pour chaque point du solide (S_k) lié au repère R_k , on déduit l'accélération à partir de la vitesse à partir de la relation : $\vec{\gamma}^i(A_k) = \dfrac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt}$

Nous allons chercher une relation qui lie les accélérations : $\vec{\gamma}^i(A_k)$ et $\vec{\gamma}^i(B_k)$

Nous avons déjà établi une relation entre les vitesses des deux points :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$$

Nous déduirons la relation entre les accélérations par dérivation de l'expression des vitesses.

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \frac{d^i \vec{V}^i(B_k)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^i(A_k)}{dt} + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \overrightarrow{A_k B_k}}{dt}$$

et comme : $\dfrac{d^i \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} = \dfrac{d^k \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$ car $\dfrac{d^k \overrightarrow{A_k B_k}}{dt} = \vec{0}$

on obtient finalement la relation entre les accélération des deux points A_k et B_k du solide :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{A_k B_k} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \right)$$

On constate que si la vitesse de rotation est constante $\dot{\vec{\Omega}}_k^i = \vec{0}$ l'expression devient :

$$\vec{\gamma}^i(B_k) = \vec{\gamma}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \right) = \vec{\gamma}^i(A_k) - \overrightarrow{A_k B_k} \left(\vec{\Omega}_k^i \right)^2$$

7.4. Torseur cinématique

La formule de distribution des vitesses est donnée par la relation :

$$\vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$$

La formule de transport des moments entre deux points A_k et B_k du solide a pour expression :

$\overrightarrow{M}(B_k) = \overrightarrow{M}(A_k) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{A_k B_k}$; nous constatons qu'il y a équivalence entre ces deux équations.

Le vecteur vitesse au point B_k est le moment au point B_k d'un torseur que nous noterons : $[C]_{B_k}$ et la résultante n'est autre que le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}_k^i$.

Le torseur cinématique au point B_k ou (torseur de distribution des vitesses) relatif au mouvement du solide par rapport à R_i a pour éléments de réduction :

- le vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}_k^i$;
- la vitesse au point B_k : $\vec{V}^i(B_k)$

il sera noté sous la forme : $[C]_{B_k} = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \\ \vec{V}^i(B_k) = \vec{V}^i(A_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{A_k B_k} \end{cases}$

Le torseur cinématique est d'un grand intérêt car il caractérise complètement le mouvement d'un solide par rapport au repère R_i en ce qui concerne les vitesses.

Comme les éléments de réduction du torseur cinématique sont des fonctions du temps alors le torseur cinématique en dépend, il a donc à chaque instant une résultante et un champ de vitesse différent.

7.5. Axe instantané de rotation

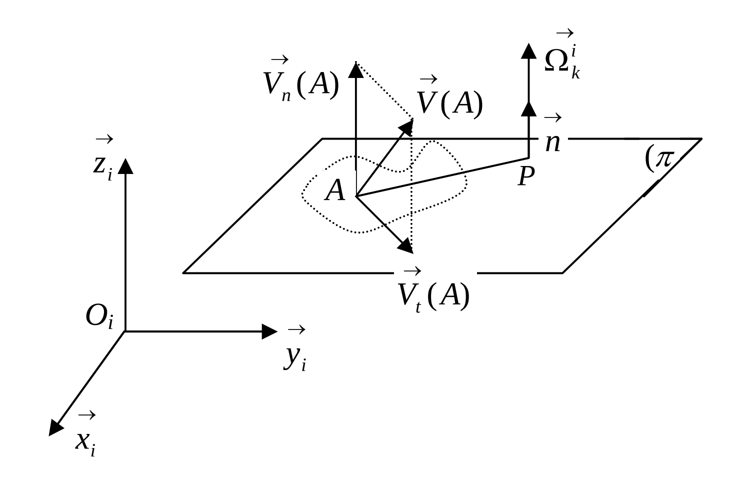
On appelle axe instantané de rotation l'axe central du torseur cinématique. Nous avons montré précédemment que l'axe central est l'ensemble des points P tels que le moment du torseur en ce point soit parallèle à la résultante. Dans le cas du torseur cinématique, l'ensemble de ces points constitue l'axe dont les vitesses sont parallèles au vecteur vitesse instantanée de rotation.

A chaque instant le mouvement du solide peut être considéré comme étant la composition d'un mouvement de rotation de vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$ autour de l'axe instantané et d'une translation dont la direction instantanée est parallèle au vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$.

Soit un solide *(S)* lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère R_i et $\vec{\Omega}_k^i$ le vecteur rotation instantané du solide par rapport à R_i .

On considère un point $A \in (S)$. Soit (π) un plan de normale $\vec{n}$ et contenant le point A tel que la vitesse de rotation du solide soit parallèle à $\vec{n}$: $\vec{\Omega}_k^i = \Omega_k^i \, \vec{n}$. Le vecteur vitesse du point $A \in (\pi)$ peut se décomposer en deux vecteurs, l'un dans le plan (π) et l'autre perpendiculaire à (π) , ce qui donne :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_t(A) + \vec{V}_n(A) \quad \text{avec} \quad \vec{V}_t(A) \in (\pi) \quad \text{et} \quad \vec{V}_n(A) \perp (\pi)$$



D'après ce que l'on a développé sur les torseurs, il est possible de trouver un point P tel que : $\vec{V}_t(A) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PA}$, alors l'expression de la vitesse du point A s'écrira :

$$\vec{V}(A) = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PA}$$

Quelque soit $Q \in (\pi)$ nous pouvons par la formule de transport écrire :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PA} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{AQ} = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_n(A) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Nous pouvons conclure que le vecteur vitesse du point $Q \in (\pi)$ s'écrit :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_t(Q) + \vec{V}_n(Q)$$

$$\text{avec : } \vec{V}_t(Q) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PQ} \quad \text{et} \quad \vec{V}_n(Q) = \vec{V}_n(A)$$

On constate que la composante de la vitesse, normale au plan (π) est la même pour tous les points du solide. On obtient finalement quelque soit P et Q :

$$\vec{V}(Q) = \vec{V}_n(Q) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{PQ}$$

Le mouvement du solide dans ce cas se décompose à chaque instant en un mouvement de translation dans le plan et en un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le point P et parallèle au vecteur unitaire $\vec{n}$.

L'axe ainsi défini par le point P et le vecteur unitaire $\vec{n} \,//\, \vec{\Omega}_k^i$ constitue l'axe instantané de rotation du solide par rapport au repère R_i.

Nous savons que l'axe central d'un torseur est le lieu des points P où le moment est minimum ou nul. Dans le cas d'un torseur cinématique, la vitesse instantanée est nulle sur tous les points de l'axe central. *On déduit que si la vitesse est nulle, en deux points distincts d'un solide, alors l'axe joignant les deux points est forcément un axe de rotation donc un axe central du torseur cinématique.*

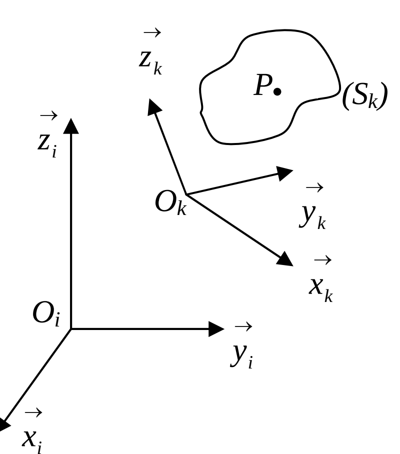
8. Lois de composition des mouvements

8.1. Loi de composition des vitesses

Soit $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un repère fixe de référence et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un repère en mouvement quelconque par rapport au repère fixe. On considère un solide (S_k) dont le mouvement est connu dans le repère relatif $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$.

Soit P un point du solide, nous pouvons écrire à chaque instant : $\overrightarrow{O_iP} = \overrightarrow{O_iO_k} + \overrightarrow{O_kP}$

La vitesse du point P dans le repère R_i est donnée par la dérivée du vecteur $\overrightarrow{O_iP}$ dans ce même repère.



$$\vec{V}^i(P) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iP}}{dt} = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iO_k}}{dt} + \frac{d^i\,\overrightarrow{O_kP}}{dt}$$

Développons les deux termes de la vitesse, ce qui donne :

$\dfrac{d^i\,\overrightarrow{O_iO_k}}{dt} = \vec{V}^i(O_k)$: vitesse du centre du repère R_k par rapport au repère R_i ;

$$\frac{d^i\,\overrightarrow{O_kP}}{dt} = \frac{d^k\,\overrightarrow{O_kP}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kP} = \vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_kP}$$

Finalement la vitesse du point P dans le repère R_i s'écrit :

$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P} \right)$ qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^k(P) + \vec{V}_k^i(P)$$

$\vec{V}^i(P)$: vitesse absolue du point P pour un observateur lié R_i

$\vec{V}^k(P)$: vitesse relative du point P par rapport à R_k en mouvement par rapport à R_i

$\vec{V}_k^i(P)$: Vitesse d'entraînement du point P s'il était immobile dans R_k .

8.1.1. Propriétés mathématiques du vecteur $\vec{V}_k^i(P)$

- $\vec{V}_k^i(P) = -\vec{V}_i^k(P)$: antisymétrique par rapport aux indices donc aux repères ;
- $\vec{V}_k^i(P) = \vec{V}_k^j(P) + \vec{V}_j^i(P)$

8.2. Loi de composition des accélérations

L'accélération absolue $\vec{\gamma}^i(P)$ du point P se déduit à partir de la vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} + \frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} + \frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P})}{dt}$$

Développons chacun des trois termes :

i) $$\frac{d^i \vec{V}^k(P)}{dt} = \frac{d^k \vec{V}^k(P)}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) = \vec{\gamma}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \vec{V}^k(P) \ ;$$

ii) $$\frac{d^i \vec{V}^i(O_k)}{dt} = \vec{\gamma}^i(O_k) \ ;$$

iii) $$\frac{d^i (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P})}{dt} = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{O_k P} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \overrightarrow{O_k P}}{dt}$$

$$= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{O_k P} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\frac{d^k \overrightarrow{O_k P}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P} \right)$$

$$= \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{O_k P} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{V}^k(P) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P} \right)$$

La somme des trois termes donne :

$$\vec{\gamma}^{i}(P)=\vec{\gamma}^{k}(P)+\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\vec{V}^{k}(P)+\vec{\gamma}^{i}(O_k)+\frac{d^{i}\vec{\Omega}_{k}^{i}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_kP}+\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\left(\vec{V}^{k}(P)+\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\overrightarrow{O_kP}\right)$$

$$\vec{\gamma}^{i}(P)=\vec{\gamma}^{k}(P)+\left(\vec{\gamma}^{i}(O_k)+\frac{d^{i}\vec{\Omega}_{k}^{i}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_kP}+\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge(\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\overrightarrow{O_kP})\right)+2\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\vec{V}^{k}(P)$$

Cette expression peut s'écrire sous une forme réduite :

$$\vec{\gamma}^{i}(P)=\vec{\gamma}^{k}(P)+\vec{\gamma}_{k}^{i}(P)+\vec{\gamma}_{C}(P)$$

$\vec{\gamma}^{i}(P)$: accélération absolue du point P (par rapport à R_i fixe)

$\vec{\gamma}^{k}(P)$: accélération relative du point P (par rapport au repère R_k)

$\vec{\gamma}_{k}^{i}(P)=\vec{\gamma}^{i}(O_k)+\frac{d^{i}\vec{\Omega}_{k}^{i}}{dt}\wedge\overrightarrow{O_kP}+\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge(\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\overrightarrow{O_kP})$: accélération d'entraînement du repère R_k

$\vec{\gamma}_{C}(P)=2\vec{\Omega}_{k}^{i}\wedge\vec{V}^{k}(P)$: accélération de Coriolis (accélération complémentaire)

L'accélération de Coriolis est une composition entre *la vitesse de rotation* $\vec{\Omega}_{k}^{i}$ *du repère* R_k *par rapport au repère* R_i *et la vitesse relative* $\vec{V}^{k}(P)$ *du point P.*

L'accélération de coriolis du point P est nulle, si et seulement si :

- La vitesse de rotation du repère relatif par rapport au repère absolue est nulle : $\vec{\Omega}_{k}^{i}=\vec{0}$;
- La vitesse relative du point P est nulle : $\vec{V}^{k}(P)=\vec{0}$;
- La vitesse de rotation est colinéaire avec la vitesse relative : $\vec{\Omega}_{k}^{i}$ // $\vec{V}^{k}(P)$

9. Mouvements particuliers fondamentaux

9.1. Mouvement de translation pur

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$ est dit en mouvement de translation pur par rapport à un repère $R_i(O_i,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)$ si les axes de $R_k(O_k,\vec{x}_k,\vec{y}_k,\vec{z}_k)$ gardent une direction

fixe par rapport à ceux de $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$, au cours du temps.

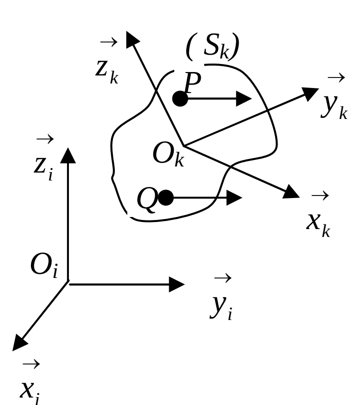
Tous les points du solide ont la même vitesse et la même accélération que le point $P \in (S_k)$.

La vitesse de rotation du solide est nulle par rapport à R_i .

On peut écrire : $\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(O_k)$ et $\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k P} = \vec{0}$

Comme $\overrightarrow{O_k P} \neq \vec{0}$ alors $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$

Dans ce cas le champ des vitesses est un champ uniforme.



Le torseur cinématique qui décrit le mouvement de translation pur est un torseur couple, dont la résultante est nulle mais le moment n'est pas nul.

$$[C_{k/i}]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i = \vec{0} \\ \vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(Q) \neq \vec{0} \end{cases}$$

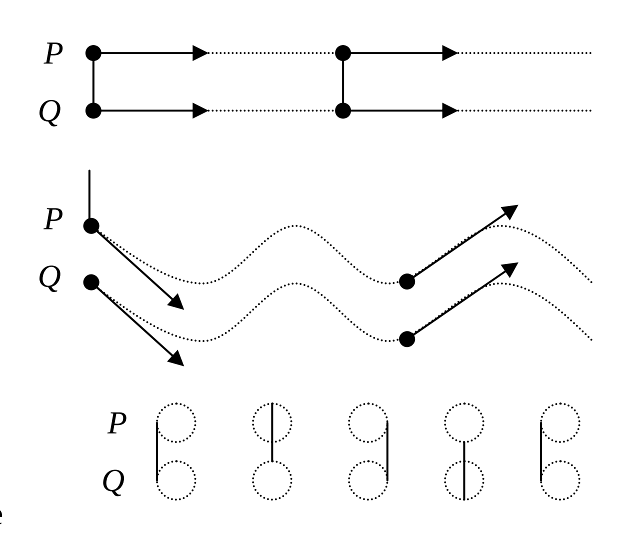
Comme tous les points du solide ont la même vitesse à chaque instant alors les points décrivent des trajectoires parallèles. Trois types de trajectoires peuvent être décrites :

Soient P et Q deux points du solide :

- Trajectoire en translation rectiligne :

- Trajectoire en translation curviligne : les vitesses de points P et Q sont parallèles et égales.

- Trajectoire en translation circulaire, les points P et Q décrivent des cercles de même rayons à la même vitesse



9.2. Mouvement de rotation pur autour d'un axe du solide

9.2.1. Vitesse d'un point *P* du solide

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est dit en mouvement de rotation pur par rapport à un repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si un axe de $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste fixe à tout instant et d'une manière permanente dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$. Nous avons donc deux points distincts O_k et I du solide (S_k) qui restent fixe dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est en rotation pur par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ à une vitesse angulaire donnée par : $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi}\, \vec{z}_i = \dot{\psi}\, \vec{z}_k$ et $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$

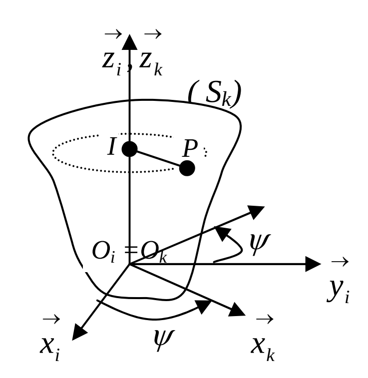
Soit P un point quelconque du solide et n'appartenant pas à l'axe de rotation tel que : $\overrightarrow{IP} = r\, \vec{x}_k$

Quel que soit $I \in \vec{z}_i$ et $\vec{z}_k$, on peut écrire :

$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k I}$, or nous avons :

$\vec{\Omega}_k^i // \overrightarrow{O_k I} \Rightarrow \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k I} = \vec{0}$ d'où :

$\vec{V}^i(I) = \vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$



I et P sont deux points du solide, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{V}^i(I) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP}$$

On remplace $\vec{\Omega}_k^i$ et $\overrightarrow{IP}$ par leurs expressions, la vitesse du point *P* devient :

$$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP} = \dot{\psi}\, \vec{z}_k \wedge r\, \vec{x}_k = r\dot{\psi}\, \vec{y}_k$$

Dans un mouvement de rotation pur, le torseur des vitesses est équivalent au torseur glisseur défini par : $[C_{k/i}]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i \neq \vec{0} \\ \vec{V}^i(I) = \vec{0} \end{cases}$ avec $I \in \vec{z}_i$ et $\vec{z}_k$

9.2.2. Accélération du point P du solide

Nous avons trouvé précédemment la vitesse du point P, elle est donnée par :

$\vec{V}^i(P) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP}$; on déduit l'accélération par dérivation de cette expression :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{V}^i(P)}{dt} = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \frac{d^i \overrightarrow{IP}}{dt}$$ or nous avons :

$\frac{d^i \overrightarrow{IP}}{dt} = \frac{d^k \overrightarrow{IP}}{dt} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP}$; comme $\overrightarrow{IP} = Cte$ dans le repère R_k alors $\frac{d^k \overrightarrow{IP}}{dt} = \vec{0}$

ce qui donne : $\frac{d^i \overrightarrow{IP}}{dt} = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP}$, l'expression de l'accélération devient :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_k^i \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{IP} \right)$$

En développant cette expression on obtient :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{IP} + \vec{\Omega}_k^i \ (\vec{\Omega}_k^i \bullet \overrightarrow{IP}) - \overrightarrow{IP} \ (\vec{\Omega}_k^i \bullet \vec{\Omega}_k^i)$$

or nous avons : $\vec{\Omega}_k^i \perp \overrightarrow{IP} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_k^i \bullet \overrightarrow{IP} = 0$ et $\vec{\Omega}_k^i \bullet \vec{\Omega}_k^i = \vec{\Omega}_k^{i\,2}$

l'expression finale de l'accélération sera :

$$\vec{\gamma}^i(P) = \underbrace{-\overrightarrow{IP} \ \vec{\Omega}_k^{i\,2}}_{\text{Accélération normale suivant } \overrightarrow{IP}} + \underbrace{\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} \wedge \overrightarrow{IP}}_{\text{Accélération tangentielle au point } P}$$

En remplaçant $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\psi} \vec{z}_k$, $\overrightarrow{IP} = r \vec{x}_k$ et $\frac{d^i \vec{\Omega}_k^i}{dt} = \ddot{\psi} \vec{z}_k$ par leur expressions respectives

$$\vec{\gamma}^i(P) = -r \dot{\psi}^2 \vec{x}_k + r \ddot{\psi} \vec{y}_k = \vec{\gamma}_n(P) + \vec{\gamma}_t(P)$$

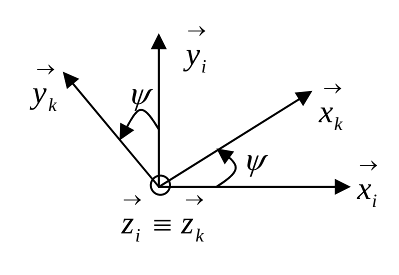
Les expressions de la vitesse et de l'accélération peuvent s'exprimer facilement dans le repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ en déterminant la matrice de passage du repère R_i vers le repère R_k : $P_{Rk \to Ri}$

$$\vec{x}_k = \cos\psi\, \vec{x}_i + \sin\psi\, \vec{y}_i + 0.\vec{z}_i$$

$$\vec{y}_k = -\sin\psi\, \vec{x}_i + \cos\psi\, \vec{y}_i + 0.\vec{z}_i$$

$$\vec{x}_k = 0.\vec{x}_i + 0.\vec{y}_i + \vec{z}_i$$

d'où $P_{Rk \to Ri} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



La vitesse et l'accélération, aurons pour expression dans R_i :

$$\vec{V}^i(P) = r\dot{\psi}\ \vec{y}_k = r\dot{\psi}(-\sin\psi\, \vec{x}_i + \cos\psi\, \vec{y}_i) = -r\dot{\psi}\sin\psi\, \vec{x}_i + r\dot{\psi}\cos\psi\, \vec{y}_i$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = -r\dot{\psi}^2\ \vec{x}_k + r\ddot{\psi}\ \vec{y}_k = -r\dot{\psi}^2(\cos\psi\, \vec{x}_i + \sin\psi\, \vec{y}_i) + r\ddot{\psi}(-\sin\psi\, \vec{x}_i + \cos\psi\, \vec{y}_i)$$

$$\vec{\gamma}^i(P) = -r(\dot{\psi}^2\cos\psi + \ddot{\psi}\sin\psi)\, \vec{x}_i + r(-\dot{\psi}^2\sin\psi + \ddot{\psi}\cos\psi)\, \vec{y}_i$$

9.3. Mouvement hélicoïdal (rotation + translation)

Un solide (S_k) lié à un repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ décrit un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère fixe $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ si :

- Un axe du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ reste en coïncidence à tout instant avec un axe du repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$
- La coordonnée du point (O_k) centre du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ suivant l'axe de coïncidence, est proportionnelle à l'angle de rotation du repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ par rapport au repère $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ au cours du mouvement de rotation.

Nous avons alors : $\overrightarrow{O_iO_k} = \lambda\ \psi(t)\, \vec{z}_i = \lambda\ \psi(t)\, \vec{z}_k$, le scalaire λ représente le pas du mouvement hélicoïdal le long de l'axe de coïncidence.

Nous avons deux mouvements qui se superposent :

- Un mouvement de translation le long de l'axe commun $\vec{z}_i \equiv \vec{z}_k$;
- Un mouvement de rotation autour de ce même axe $\vec{z}_i \equiv \vec{z}_k$.

Soit P un point du solide, nous avons à chaque instant : $\overrightarrow{O_iP} = \overrightarrow{O_iO_k} + \overrightarrow{O_kP}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_iO_k}$ s'écrit dans le repère R_i : $\overrightarrow{O_iO_k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \lambda\psi(t) \end{cases}_{R_i}$

Le vecteur $\overrightarrow{O_kP}$ s'écrit dans le repère R_k : $\overrightarrow{O_kP} = \begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}_{R_k}$ et dan R_i $\overrightarrow{O_kP} = \begin{cases} a\cos\psi(t) \\ b\sin\psi(t) \\ c \end{cases}_{R_i}$

La somme des deux vecteurs nous donne le vecteur $\overrightarrow{O_iP}$ dans le repère R_i :

$$\overrightarrow{O_iP} = \begin{cases} a\cos\psi(t) \\ b\sin\psi(t) \\ c + \lambda\psi(\text{t}) \end{cases}_{R_i}$$

La vitesse et l'accélération du point P dans le repère R_i se déduisent facilement par dérivation dans le même repère :

$$\vec{V}^i(P) = \frac{d^i\,\overrightarrow{O_iP}}{dt} = \begin{cases} -a\dot{\psi}\sin\psi(t) \\ b\dot{\psi}\cos\psi(t) \\ \lambda\dot{\psi}(\text{t}) \end{cases}_{R_i} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma}^i(P) = \frac{d^i\,\vec{V}^i(P)}{dt} = \begin{cases} -a\ddot{\psi}\sin\psi(t) - a\dot{\psi}^2\cos\psi(t) \\ b\ddot{\psi}\cos\psi(t) - b\dot{\psi}^2\sin\psi(t) \\ \lambda\ddot{\psi}(\text{t}) \end{cases}_{R_i}$$

Exercice 06: **Simulateur de vol**

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras *(1)*** en rotation dans le plan horizontal tel que : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe $\vec{x}_1$ tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ; $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec ***OB = R.***

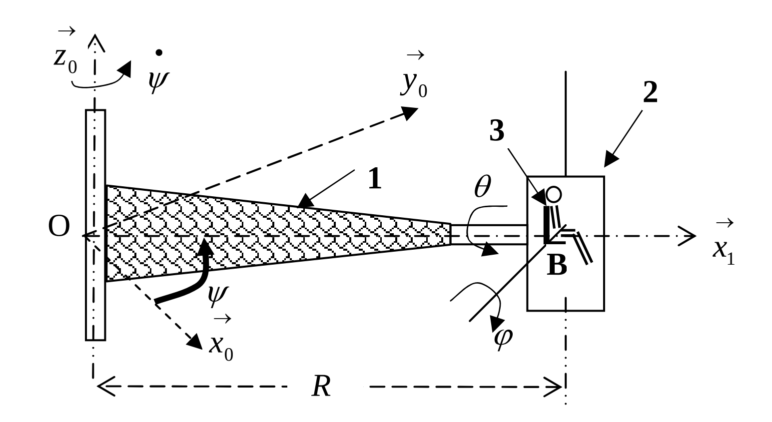
Un siège-pilote *(3)* en rotation autour de l'axe $\vec{y}_2$ tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif. $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :

1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;
2) Trouver le vecteur position du point ***T***, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à R_0;
3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point ***T*** par composition de mouvement et par la cinématique du solide.
4) Déterminer l'accélération absolue du point ***T*** par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

a) Rotation du bras

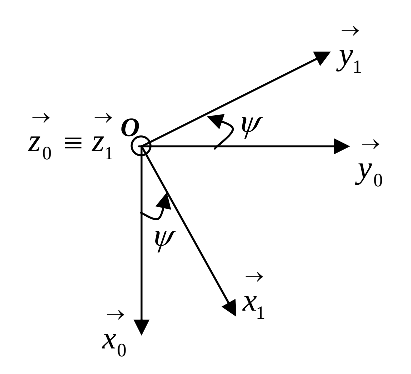
Nous avons : $OB = R$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe. R_2 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_0 \to R_1}$$



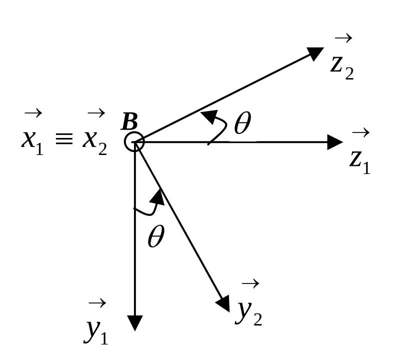
***a) Rotation du* cockpit**

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_1 \to R_2}$$



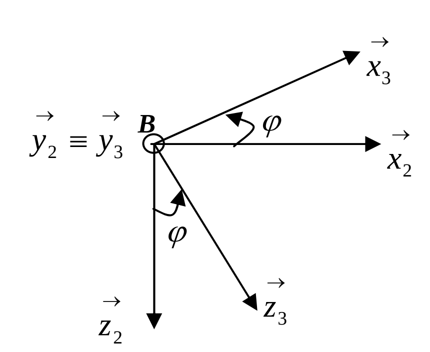
a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_3 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_3 \to R_2}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_2

Nous avons : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, sachant que $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$

$$\overrightarrow{OB} = \underset{R_1,R_2}{\begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \; ; \; \overrightarrow{BT} = \underset{R_3}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}} \quad \text{d'où : } \overrightarrow{OT} = \underset{R_2}{\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur $\vec{z}_1$ 'écrit : $\vec{z}_1 = \sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\left(\sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2\right) = \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

La vitesse relative est donnée par : $\vec{V}^2(T) = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{BT}}{dt} \underset{R_2}{\begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}}$

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}$

$$\vec{V}_2^0(T) = \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \\ -\dot{\psi}\sin\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \end{cases}}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

3.2. *Par la cinématique du solide*

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT}$

Nous avons : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\theta \\ -R\dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT} = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

4. Accélération absolue du point *T* par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{abs}(T) = \vec{\gamma}_{rel}(T) + \vec{\gamma}_{ent}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$

$$\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^2(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$$

Explicitons chacun des termes de cette relation :

(1) : $$\vec{\gamma}^{2}(T) == \frac{d^2 \vec{V}^2(T)}{dt} \quad \begin{cases} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(T) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$$

(2) : $$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OT} = \begin{cases} L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ L\ddot{\theta}\cos\varphi + (R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -(R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}\right) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}_{R_2}$$

(3) : $\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT} \right) = \begin{cases} -\dot{\psi}^2 (R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta (R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}^2 \cos\varphi\cos\theta\sin\theta \\ -L\dot{\theta}^2\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta (R + L\sin\varphi) - L\dot{\psi}^2\cos\varphi\sin^2\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(T) \right)$$

(4) : $\vec{\gamma}_c(T) = 2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi + 2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \\ -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$\vec{\gamma}^0(T) =$ **(1) +(2) +(3) + (4)**

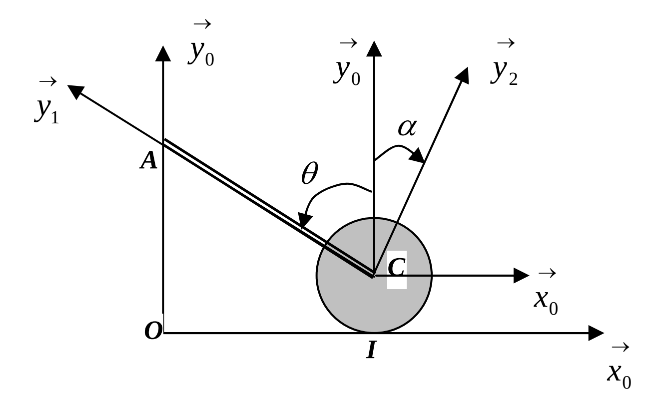
Exercice 10 :

Soit un système constitué de deux solides ***(S₁)*** lié au repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et ***(S2)*** lié au repère $R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en mouvement par rapport à un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

(S₁) : est une barre de longueur ***L***, de masse ***m*** dont l'extrémité ***A*** glisse sur un mur et l'autre extrémité ***B*** est articulée au disque ;

(S₂) : est un disque de masse ***M*** et de rayon ***R*** qui roule sans glisser sur un plan horizontal tel que représenté sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer la relation exprimant le non glissement du disque sur le plan au point ***I*** ;
2. Déterminer le centre instantané de rotation (C.I.R.) de la barre :
   a) Géométriquement
   b) Analytiquement.



Solution :

$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ; $\overrightarrow{OC} = \begin{cases} L\sin\theta \\ R \\ 0 \end{cases}_{R_0}$; $\overrightarrow{OI} = \begin{cases} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$

$R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: lié à la barre; tel que : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0$

$R_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: lié au disque ; tel que : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ et $\vec{\Omega}_2^0 = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 = -\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

1. Condition de roulement sans glissement

La condition de non glissement du disque sur le plan est vérifiée si, la vitesse du point *I* appartenant au disque est nulle : $\vec{V}(I \in disque) = \vec{0}$ par la cinématique du solide écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{CI} = \vec{0} \quad \text{avec :} \quad \vec{V}^0(C) = \frac{d^0\overrightarrow{OC}}{dt} = \begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

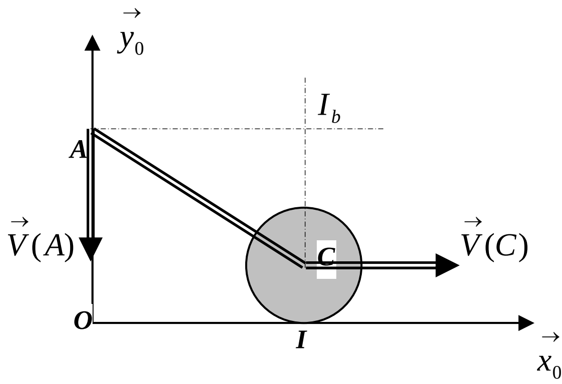
$$\underset{R_0}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ -R \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \Leftrightarrow L\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\alpha} = 0$$

2. Centre instantané de rotation de la barre

a) Gométriquement

Soit I_b le centre de rotation instantanée *(C.I.R.)* de la barre .

Sa position est repéré en traçant deux droites, l'une perpendiculaire à la vitesse $\vec{V}^0(A)$ au point *A* et l'autre perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point *C*. Le point d'intersection de ces deux droites est le *(C.I.R.)* de la barre.



En effet nous avons :

$$\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}^0(A) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{I_bA} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}^0(A) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(A) \perp \overrightarrow{I_bA} \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CI_b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}^0(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{I_bC} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}^0(C) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(C) \perp \overrightarrow{I_bC} \end{cases}$$

a) Analytiquement

Soit $\overrightarrow{OI_b} = \underset{R_0}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} \Rightarrow \overrightarrow{CI_b} = \underset{R_0}{\begin{cases} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{cases}}$

On sait que : $\vec{V}^0(I_b) = \vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CI_b} = \vec{0}$

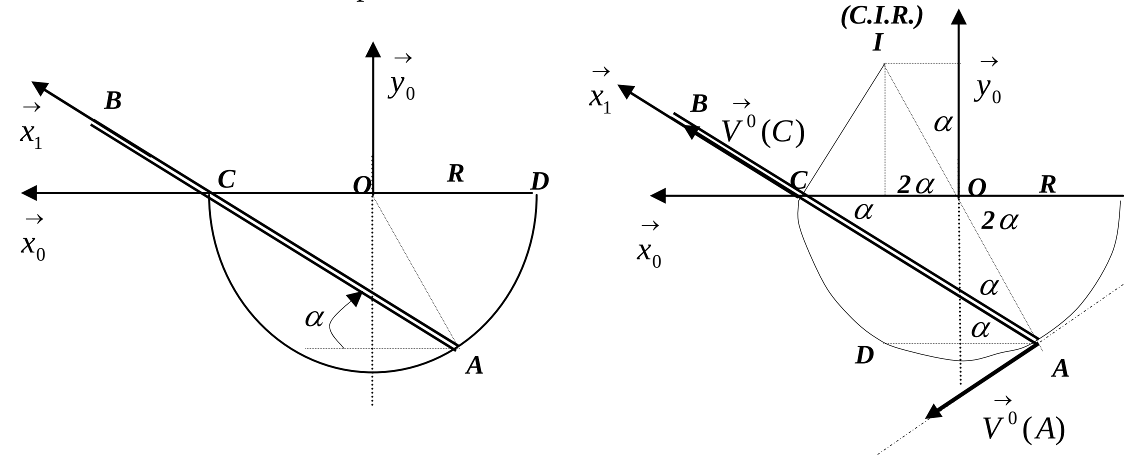
$$\vec{V}^0(C) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{CI_b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{R_0}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} x - L\sin\theta \\ y - R \\ z \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$\underset{R_0}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta - (y-R)\dot{\theta} = 0 \\ (x - L\sin\theta)\dot{\theta} = 0 \\ z = 0 \end{cases}} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{R_0}{\begin{cases} y = R + L\cos\theta \\ x = L\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}}$$

Exercice 11 :

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe lié à un demi cylindre creux de rayon R, sur lequel se déplace une barre de longueur $2L$. Le mouvement se fait dans le plan vertical ***(xOy)***. La barre est en contact permanent avec le demi cylindre en deux points, l'extrémité A en contact avec la surface du cylindre et le point C avec son bord.

1. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) géométriquement ;
2. Retrouver les coordonnées du centre instantané de rotation (C.I.R.) analytiquement ;
3. En déduire la vitesse du point C de la barre.



Solution :

1. Coordonnées du C.I.R. géométriquement :

La vitesse du point A est tangente au cercle de rayon R. On trace la perpendiculaire à $\vec{V}^0(A)$, elle passe par le point O et elle rencontre la perpendiculaire à $\vec{V}^0(C)$ au point I. La vitesse du point C est portée par la barre.

Le triangle *CAI* est rectangle en *C* car il est inscrit à l'intérieur d'un cercle de diamètre *CI*.

Le triangle *COA* est isocèle : $OC = OA = R$, les angles $(CO, CA) = (AO, AC) = (AD, AC) = \alpha$

Le triangle *COI* est isocèle : $OC = OI = R$, les angles $(CO, CI) = (IO, IC) = 2\alpha$

On déduit facilement les coordonnées du point I tel que : $\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\begin{cases} x_I = R\cos 2\alpha \\ y_I = R\sin 2\alpha \end{cases}}$

2. Coordonnées du C.I.R. analytiquement :

On sait que la vitesse du centre instantané de rotation *(C.I.R.)* de la barre est nul :

$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AI} = \vec{0}$; Déterminons d'abord la vitesse du point $\boldsymbol{A}$:

$$\text{Nous avons : } \overrightarrow{OA} = \underset{R_0}{\begin{cases} -R\cos 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} \Rightarrow \vec{V}^0(A) = \underset{R_0}{\begin{cases} 2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ -2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha \\ 0 \end{cases}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AI} = \underset{R_0}{\begin{cases} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}}$$

$$\underset{R_0}{\begin{cases} 2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ -2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} x_I + R\cos 2\alpha \\ y_I + R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$2R\dot{\alpha}\sin 2\alpha - \dot{\alpha}\left(y_I + R\sin 2\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_I = R\sin 2\alpha$$

$$-2R\dot{\alpha}\cos 2\alpha + \dot{\alpha}\left(x_I + R\cos 2\alpha\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_I = R\cos 2\alpha$$

3. Vitesse du point C de la barre

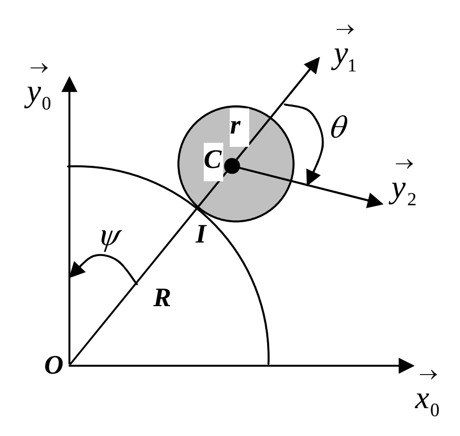
Nous avons : $\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IC}$; or : $\vec{V}^0(I) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IC} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} R - R\cos 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} R\dot{\alpha}\sin 2\alpha \\ R\dot{\alpha}(1 - \cos 2\alpha) \\ 0 \end{cases}}$$

Exercice 12 :

Soit un système constitué d'un cylindre fixe de rayon $\boldsymbol{R}$ lié au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et d'un disque de masse $\boldsymbol{m}$ de rayon $\boldsymbol{r}$ lié au repère $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ en mouvement de rotation autour du cylindre comme représenté sur la figure ci-dessous. Déterminer :

1. La matrice d'inertie du disque au point $\boldsymbol{O}$, dans le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$;
2. La relation entre $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$ exprimant la condition de non glissement du disque au point $\boldsymbol{I}$;
3. La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement.



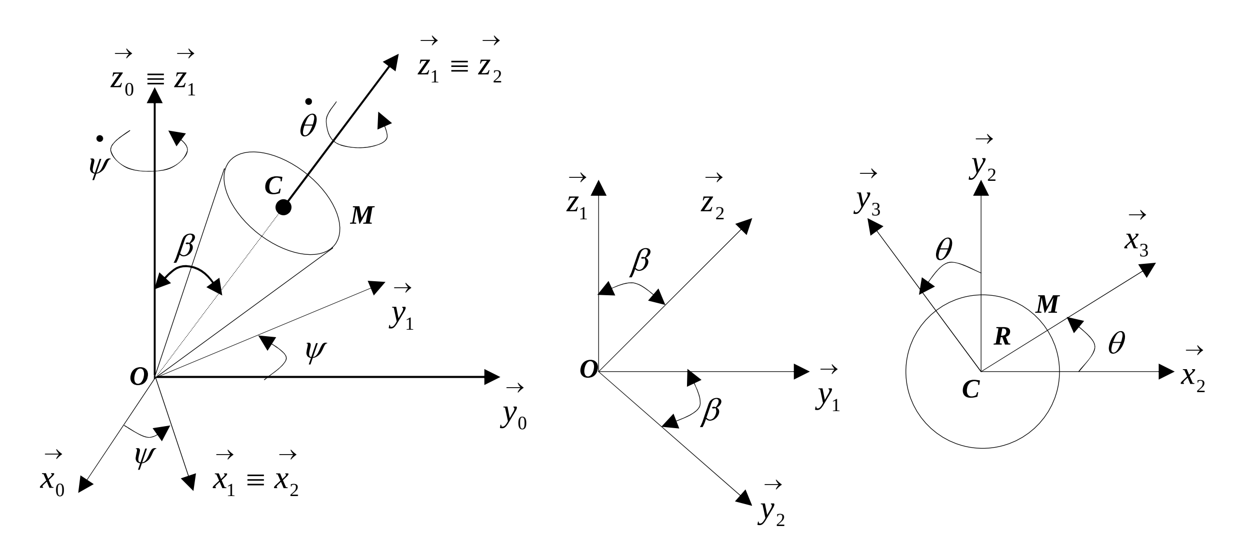
Exercice 13 :

Un cône homogène de hauteur $\boldsymbol{h}$, de rayon de base $\boldsymbol{R}$ est en mouvement de rotation autour de l'axe vertical $\vec{z}_0$ d'un repère orthonormé fixe, avec une vitesse angulaire $\dot{\psi} = Cte$. L'axe principal du cône est incliné d'un angle β constant par rapport à cet axe. Le cône tourne aussi autour de son axe principal avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = Cte$ comme représenté sur la figure ci-dessous. Le repère R_2 est le repère relatif.

On prendra aussi le repère R_2 comme repère de projection.

Déterminer :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;
2. La vitesse et l'accélération du point $\boldsymbol{C}$ par dérivation ;
3. La vitesse et l'accélération du point $\boldsymbol{M}$ par composition de mouvement ;



Solution :

1. Les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;

Nous avons : $OC = h$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe et R_2 : le repère de projection.

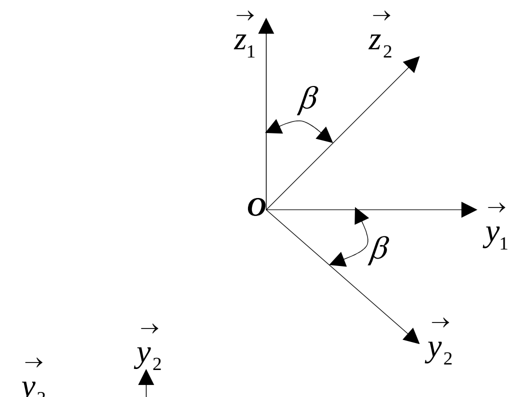
$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ avec $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$, $\dot{\psi} = Cte$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: tel que : $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \beta = Cte$ avec $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$, $\dot{\beta} = 0$

$R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: tel que : $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = \theta$ avec $\vec{\Omega}_3^2 = \dot{\theta}\,\vec{z}_2 = \dot{\theta}\,\vec{z}_3$, $\dot{\theta} = Cte$

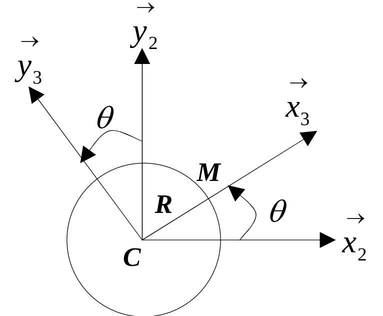
Matrice de passage de R_1 ***vers*** R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



Matrice de passage de R_3 ***vers*** R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vitesse et accélération du point C par dérivation ;

2.1. Vitesse

Nous avons : $\overrightarrow{OC} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}_{R_2}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ h \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{V}^0(C) = \frac{d^0\overrightarrow{OC}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OC}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OC} \quad , \text{ avec : } \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$$

or : $\vec{z}_1 = -\sin\beta\,\vec{y}_2 + \cos\beta\,\vec{z}_2$ d'où : $\vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{V}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ h \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -\dot{\psi}h\sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

2.2. Accélération :

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0\vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(C)$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} -\dot{\psi}h\sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}^2 h\sin\beta\cos\beta \\ -\dot{\psi}^2 h\sin\beta\sin\beta \end{cases}_{R_2}$$

3. Vitesse et accélération du point M par composition de mouvement ;

3.1 Vitesse :

Nous avons : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M)$,

avec: $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ h \end{cases}_{R_2} \Rightarrow \vec{V}^2(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{V}_2^0(M)=\vec{V}^0(O)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{array}\right.}\wedge\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h\end{array}\right.}=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{array}\right.}$$

ce qui donne : $\vec{V}^0(M)=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta-R\dot{\theta}\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta+R\dot{\theta}\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{array}\right.}$

3.2 Accélération :

Nous avons : $\vec{\gamma}^0(M)=\vec{\gamma}^2(M)+\vec{\gamma}_2^0(M)+\vec{\gamma}_c(M)$,

$$\vec{\gamma}^2(M)=\frac{d^2\vec{V}^2(M)}{dt}=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}-R\dot{\theta}^2\cos\theta\\-R\dot{\theta}^2\sin\theta\\0\end{array}\right.}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M)=\vec{\gamma}^0(O)+\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OM}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right)\;;\quad\text{avec : }\vec{\gamma}^0(O)=\vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}=\frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{\Omega}_2^0=\vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right)=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{array}\right.}\wedge\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{array}\right.}\wedge\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}R\cos\theta\\R\sin\theta\\h\end{array}\right.}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OM}\right)=\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}0\\-\dot{\psi}\sin\beta\\\dot{\psi}\cos\beta\end{array}\right.}\wedge\underset{R_2}{\left\{\begin{array}{l}-\dot{\psi}h\sin\beta-R\dot{\psi}\cos\beta\sin\theta\\R\dot{\psi}\cos\beta\cos\theta\\R\dot{\psi}\sin\beta\cos\theta\end{array}\right.}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OM} \right) = \underset{R_2}{\begin{cases} -R\dot{\psi}^2 \cos\theta \\ -\dot{\psi}^2 \cos\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) \\ -\dot{\psi}^2 \sin\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(M) \right) = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\beta \\ \dot{\psi}\cos\beta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} -R\dot{\theta}\sin\theta \\ R\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\cos\beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\beta \\ -2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\sin\beta \end{cases}}$$

La somme de toutes ces expressions donne :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \underset{R_2}{\begin{cases} -R\cos\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \cos\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) - R\sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\beta \right) \\ -\dot{\psi}^2 \sin\beta(h\sin\beta + R\cos\beta\sin\theta) - 2R\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\sin\beta \end{cases}}$$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Soient t $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère en mouvement par rapport au repère fixe avec une vitesse de rotation $\vec{\omega}$.

Montrer que : $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt}\right)$

Solution :

Nous avons : $\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{e}_1 \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{e}_1\right) = \vec{\omega}(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1) - \vec{e}_1(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_1) = \vec{\omega} - \vec{e}_1(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_1)$

$$\vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{e}_2 \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{e}_2\right) = \vec{\omega}(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2) - \vec{e}_2(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_2) = \vec{\omega} - \vec{e}_2(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_2)$$

$$\vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{e}_3 \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{e}_3\right) = \vec{\omega}(\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3) - \vec{e}_3(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_3) = \vec{\omega} - \vec{e}_3(\vec{\omega} \bullet \vec{e}_3)$$

Faisons la somme des trois expressions en sachant que : $\vec{\omega} = (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_3)\vec{e}_3$

nous obtenons :

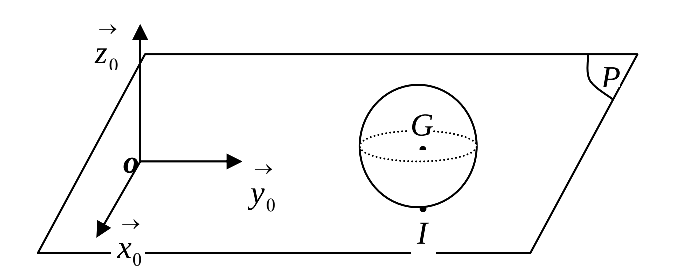
$$\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt} = 3\vec{\omega} - (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (\vec{\omega} \bullet \vec{e}_3)\vec{e}_3 == 3\vec{\omega} - \vec{\omega} = 2\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt}\right)$$

Exercice 02 :

Une sphère ***(S)*** pleine et homogène, de centre ***G,*** de rayon a, roule de manière quelconque sur un plan fixe horizontal (P). Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe lié au plan tel que $\vec{z}_0 \perp (P)$. Soit $R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ un repère orthonormé direct, lié à la sphère tel que : $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$. L'orientation du repère R_S par rapport à R_0 se fait par les angles d'Euler classiques ψ,θ,φ. On prendra R_0 comme repère de projection.

1. Etablir les figures planes de rotation de la sphère ;
2. Donner l'expression du vecteur rotation instantané de la sphère ;
3. Déterminer la vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe.
4. Ecrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.



Solution :

(S) : est une sphère homogène de rayon ***a*** ; ***(P) :*** un plan fixe ; $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + a\,\vec{z}_0)$

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ; $(\vec{x}_0,\vec{y}_0) \in (P)$ et $\vec{z}_0 \perp (P)$

$R_S(G,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$: repère lié à la sphère.

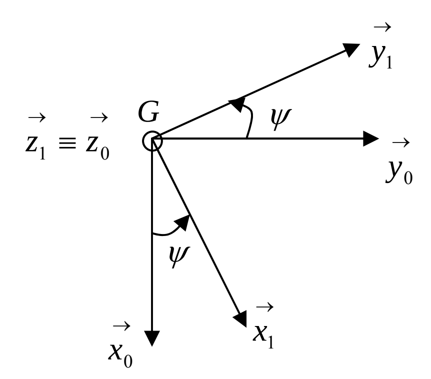
Le passage du repère R_S vers le repère R_0 se fait par trois rotations utilisant les angles d'Euler (ψ,θ,φ) et deux repères intermédiaires R_1 et R_2

1. Les figures planes :

a) *Passage du repère* R_1 *vers* R_0 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

Matrice de passage du repère R_1 vers R_0

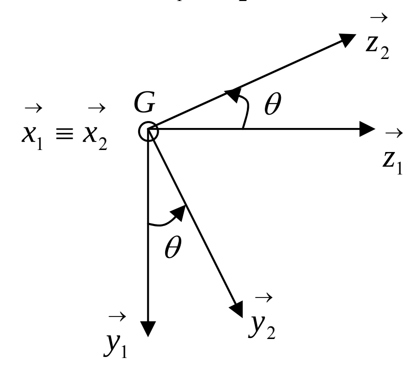
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_0}} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$



b) *Passage du repère* R_2 *vers* R_1 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$

Matrice de passage de R_2 vers R_1

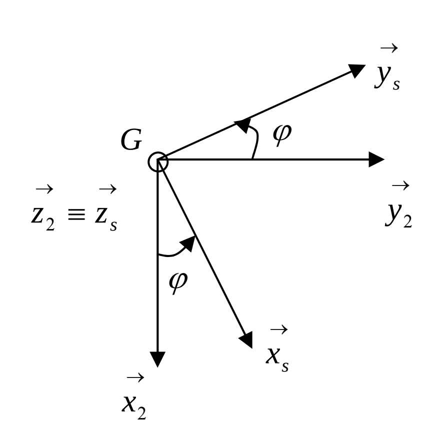
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_2 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$



c) *Passage du repère* R_S *vers* R_2 : la rotation se fait autour de l'axe $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_s$

Matrice de passage de R_s vers R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_s \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur rotation instantané de la sphère dans le repère R_0

$$\vec{\Omega}_s^0 = \vec{\Omega}_s^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$

Exprimons $\vec{x}_1$ *et* $\vec{z}_0$ dans le repère R_0. D'après les matrices de passage nous avons :

$$\vec{x}_1 = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{z}_2 = -\sin\theta\,\vec{y}_1 + \cos\theta\,\vec{z}_1 = -\sin\theta\left(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0\right) + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_2 = \sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0$$

ce qui donne : $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\varphi}\left(\sin\theta\sin\psi\,\vec{x}_0 - \sin\theta\cos\psi\,\vec{y}_0 + \cos\theta\,\vec{z}_0\right) + \dot{\theta}\left(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0\right) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)\vec{x}_0 + \left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right)\vec{y}_0 + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_s^0 = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{array}\right.}$$

3. Vitesse du point de contact I de la sphère avec le plan fixe

Les points G et I appartiennent à la sphère. Par la cinématique du solide, nous pouvons connaître la vitesse du point I à partir de celle de G, en effet nous avons : $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{GI}$

Avec : $\overrightarrow{OG} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ a \end{array}\right.} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{array}\right.}$

et $\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} x \\ y \\ 0 \end{array}\right.} \Rightarrow \overrightarrow{GI} = \underset{R_0}{\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -a \end{array}\right.}$

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -a \end{cases}$$, on obtient finalement :

$$\vec{V}^0(I) = \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

4. Condition de roulement sans glissement de la sphère sur le plan.

Pour que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite il faut que la vitesse du point I soit nulle : $\vec{V}^0(I) = \vec{0} \iff \begin{cases} \dot{x} - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y} + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}_{R_0}$

On multiplie l'équation *(1)* par $\sin\psi$ et l'équation *(2)* par $\cos\psi$ puis on fait la différence des deux équations : $\begin{cases} \dot{x}\sin\psi - a\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\sin\psi + \dot{\theta}\sin^2\psi\right) = 0 & (1) \\ \dot{y}\cos\psi + a\left(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\cos\psi + \dot{\theta}\cos^2\psi\right) = 0 & (2) \end{cases}$

$$(2)-(1) \Rightarrow -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi + a\dot{\theta} = 0$$

comme nous avons aussi : $\sin\psi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\cos\psi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

L'équation devient : $\dfrac{\dot{y}x - \dot{x}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + a\dot{\theta} = 0$

Exercice 03 :

Soit le système mécanique composé d'une tige ***OO₂*** de longueur ***L*** et d'une plaque rectangulaire de dimension ***2a*** et ***2b*** articulée en ***O₂*** avec la tige (voir figure). R_0 étant le repère fixe ; R_1 en rotation de ψ autour de $\vec{z}_0$. La plaque tourne autour de la tige à une vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.

On donne $\dot{\psi} = Cte$; $\dot{\theta} = Cte$; $\dot{\varphi} = Cte$

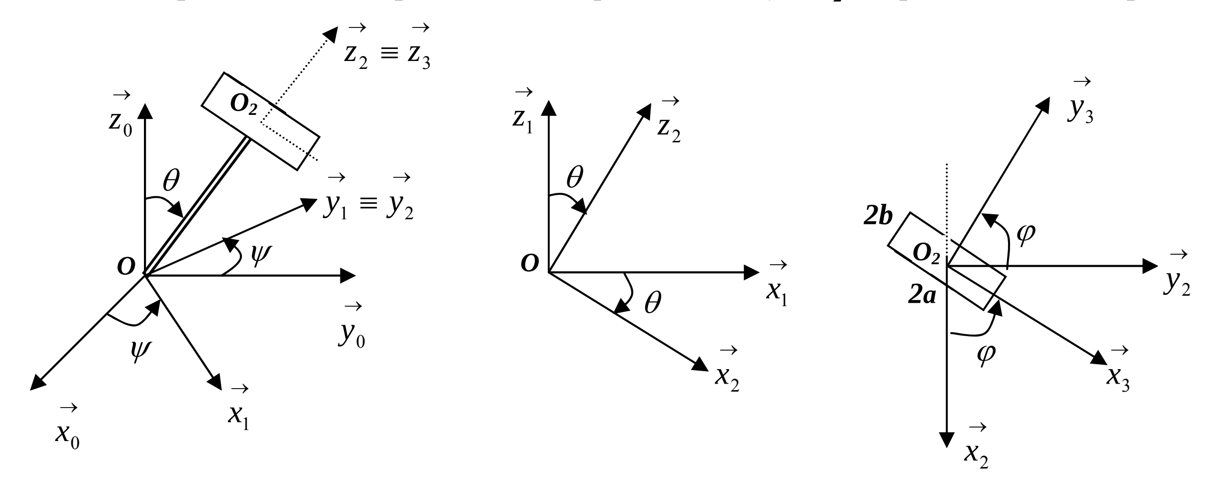
1) Déterminer les matrices de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;

2) Déterminer le vecteur rotation instantané de R_3 par rapport à R_0 exprimé dans R_2 ;

3) Déterminer par dérivation la vitesse $\vec{V}^0(O_2)$ exprimée dans le repère R_2 ;

4) Déterminer par la cinématique du solide la vitesse $\vec{V}^0(A)$ par rapport à R_0 exprimée R_2 ;

5) Déterminer par dérivation et par la cinématique du solide $\vec{\gamma}^0(O_2)$ exprimée dans le repère R_2.



Solution :

La tige : $OO_2 = L$; La plaque : Longueur $2a$, Largeur $2b$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: repère en rotation autour de l'axe $\vec{z}_0$ par rapport au repère R_0

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: repère lié à la tige, en rotation autour de l'axe $\vec{y}_1$ par rapport à R_1

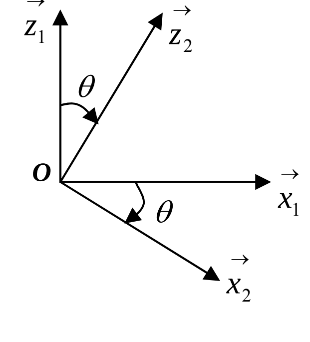
$R_3(O_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: repère lié à la plaque, en rotation autour de l'axe $\vec{z}_2$ par rapport à R_2

on donne : $\dot{\psi} = Cte$, $\dot{\theta} = Cte$, $\dot{\varphi} = Cte$

1. Matrices de passage

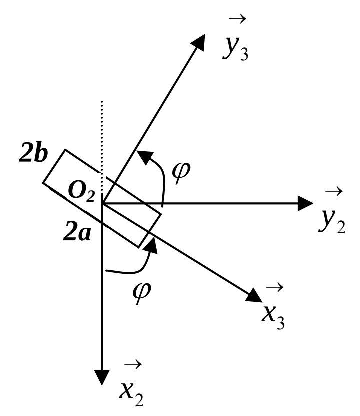
Matrice de passage de R_2 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



Matrice de passage de R_3 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur rotation instantané de R_3 par rapport à R_0 exprimé dans R_2 ;

D'après la relation de Chasles nous pouvons écrire :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{y}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1$$

Exprimons le vecteur unitaire $\vec{z}_1$ dans le repère R_2 , il s'écrit : $\vec{z}_1 = -\sin\theta\,\vec{x}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2$

D'où : $\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{y}_2 + \dot{\psi}\left(-\sin\theta\,\vec{x}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2\right) = -\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{x}_2 + \dot{\theta}\,\vec{y}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right)\vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{array} \right.{}_{R_2}$$

3. $\vec{V}^0(O_2)$ par dérivation et exprimée dans le repère R_2 ;

Par dérivation nous avons : $\vec{V}^0(O_2) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OO_2}$

Or $\overrightarrow{OO_2} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_2} \Rightarrow \dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} = \vec{0}$; et $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{y}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = \begin{cases} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{V}^0(O_2) = \begin{cases} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\theta} \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

4. Vitesse du point A par rapport à R_0 exprimée dans le repère R_2 ;

Par la cinématique du solide nous pouvons écrire :

$$\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{O_2A}$$

Le point A est dans le repère R_3 et a pour coordonnées : $\overrightarrow{O_2A} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_2}$

D'où : $\vec{V}^0(A) = \begin{cases} L\dot{\theta} \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} a\cos\varphi \\ a\sin\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{V}^0(A) = \begin{cases} L\dot{\theta} - a\sin\varphi\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ L\dot{\psi}\sin\theta + a\cos\varphi\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ -a\left(\dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi\right) \end{cases}_{R_2}$$

5. Accélération $\vec{\gamma}^0(O_2)$ par dérivation et par la cinématique du solide dans le repère R_2.

5.1. par dérivation

Nous savons que : $\dot{\psi} = Cte$; $\dot{\theta} = Cte$; $\dot{\varphi} = Cte$; alors :

$$\vec{\gamma}^0(O_2) = \frac{d^0 \vec{V}^0(O_2)}{dt} = \frac{d^2 \vec{V}^0(O_2)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(O_2)$$

ce qui donne :

$$\vec{\gamma}^0(O_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} L\dot{\theta} \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ 2L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -L\dot{\theta}^2 - L\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{Bmatrix}_{R_2}$$

5.1. par la cinématique du solide

$$\vec{\gamma}^0(O_2) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OO_2} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OO_2}\right)$$

Les points O et O_2 appartiennent à la tige leurs vitesses et leurs accélérations sont nulles dans le repère R_2 lié à la tige.

$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$ car le point O est fixe dans la tige ;

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OO_2} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \\ -\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OO_2}\right) = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -L\dot{\theta}^2 - L\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{Bmatrix}_{R_2}$$

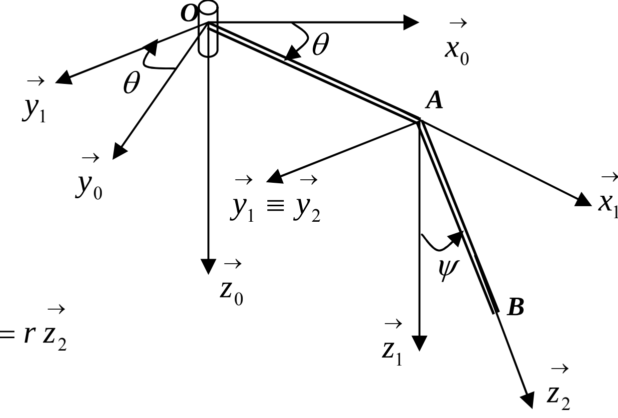
La somme de ces trois expressions donne :

$$\vec{\gamma}^0(O_2) = \begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} -L\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -L\dot{\theta}^2 - L\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -L\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ 2L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -L\dot{\theta}^2 - L\dot{\psi}^2\sin^2\theta \end{cases}_{R_2}$$

Exercice 04 :

Soient deux barres articulées en ***A*** faisant partie d'un mécanisme de régulation. La barre ***OA*** est en rotation autour de l'axe $\vec{z}_0$ dans le plan horizontal $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. La barre ***AB*** est en rotation autour de l'axe $\vec{y}_1$ dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{z}_0)$. Soit ***P*** un point mobile sur la barre ***AB*** tel que. $\overrightarrow{AP} = r\,\vec{z}_2$, $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{z}_2$; (***a*** et ***b*** sont des constantes). R_1 : repère de projection. Déterminer :

1. Les matrices de passage de R_0 vers R_1 et de R_2 vers R_1 ;
2. $\vec{\Omega}_2^0$, $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation direct et par la cinématique du solide ;



Solution

$\overrightarrow{OA} = a\,\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AB} = b\,\vec{z}_2$ et $\overrightarrow{AP} = r\,\vec{z}_2$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation tel que $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

$R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation tel que $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$ et $\psi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$, $\vec{\Omega}_2^1 \equiv \dot{\psi}\,\vec{y}_1$

1. Matrices de passage

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

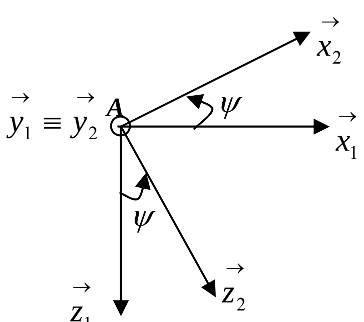
$$\begin{pmatrix}\vec{x}_0\\ \vec{y}_0\\ \vec{z}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix}$$

$$P_{R_0\rightarrow R_1}$$

Matrice de passage de R_2 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix}\vec{x}_2\\ \vec{y}_2\\ \vec{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{x}_1\\ \vec{y}_1\\ \vec{z}_1\end{pmatrix}$$

$$P_{R_2\rightarrow R_1}$$



2. $\vec{\Omega}_2^0$ puis $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation direct et par la cinématique du solide

a) *la vitesse instantanée de rotation* $\vec{\Omega}_2^0$

$$\vec{\Omega}_2^0=\vec{\Omega}_2^1+\vec{\Omega}_1^0=\dot{\psi}\,\vec{y}_1+\dot{\theta}\,\vec{z}_1=\begin{cases}0\\ \dot{\psi}\\ \dot{\theta}\end{cases}_{R_1}$$

b) $\vec{V}^0(B)$ ***par dérivation direct et par la cinématique du solide***

****) par dérivation directe***

Nous avons : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\begin{cases}a\\0\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}0\\0\\b\end{cases}_{R_2}=\begin{cases}a\\0\\0\end{cases}_{R_1}+\begin{cases}b\sin\psi\\0\\b\cos\psi\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}a+b\sin\psi\\0\\b\cos\psi\end{cases}_{R_1}$

Par dérivation nous avons : $\vec{V}^0(B)=\dfrac{d^0\,\overrightarrow{OB}}{dt}=\dfrac{d^1\,\overrightarrow{OB}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{OB}$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a + b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

) par la cinématique du solide

Nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{AB}$

Nous avons : $\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OA} \iff \vec{V}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

Car $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$ Nous avons ainsi :

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} 0 \\ a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

b) $\vec{\gamma}^0(B)$ ***par dérivation et par la cinématique du solide***

****) par dérivation***

Par dérivation nous avons : $\vec{\gamma}^0(B) = \dfrac{d^0\vec{V}^0(B)}{dt} = \dfrac{d^1\vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(B)$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi \\ (a+b\sin\psi)\ddot{\theta} + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ (a+b\sin\psi)\dot{\theta} \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi - (a + b\sin\psi)\dot{\theta}^2 \\ (a + b\sin\psi)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}_{R_1}$$

) par la cinématique du solide

Nous pouvons écrire :

$$\vec{\gamma}^{0}(B) = \vec{\gamma}^{0}(A) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Calculons d'abord : $\vec{\gamma}^{0}(A) = \vec{\gamma}^{0}(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OA}\right)$

Sachant que $\vec{\gamma}^{0}(O) = \vec{0}$, on obtient :

$$\vec{\gamma}^{0}(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} = \frac{d^1\vec{\Omega}_2^0}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{cases} \dot{\theta}\dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi \\ b\ddot{\theta}\sin\psi + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\cos\psi \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{AB}\right) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} b\sin\psi \\ 0 \\ b\cos\psi \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} b\dot{\psi}\cos\psi \\ b\dot{\theta}\sin\psi \\ -b\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}}$$

$$= \underset{R_1}{\begin{cases} -b\dot{\psi}^2\sin\psi - b\dot{\theta}^2\sin\psi \\ b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}}$$

En faisant la somme des trois termes nous obtenons :

$$\vec{\gamma}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} -a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi \\ b\ddot{\theta}\sin\psi + b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\cos\psi \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} -b\dot{\psi}^2\sin\psi - b\dot{\theta}^2\sin\psi \\ b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}}$$

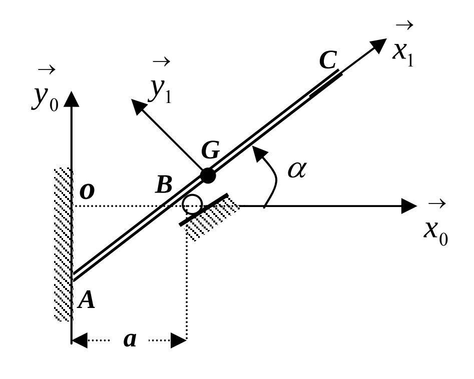
$$\vec{\gamma}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} b\ddot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}^2\sin\psi - (a + b\sin\psi)\dot{\theta}^2 \\ (a + b\sin\psi)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\psi \\ -b\ddot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}}$$

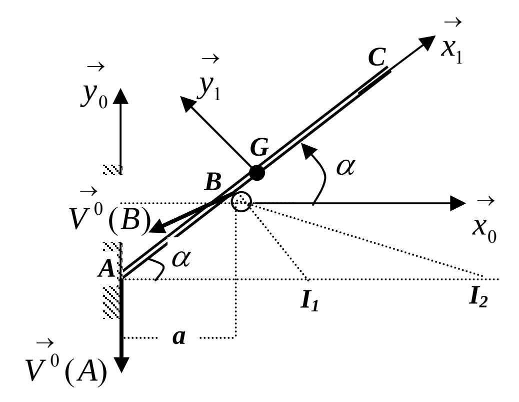
Exercice 05 :

Une barre homogène mince de longueur $AC = 2L$ et de centre G , repose sans frottement sur un petit rouleau fixe au point B et s'appuie contre un mur lisse au point A . R_0 : est le repère de projection.

1- Déterminer la vitesse de glissement en A et en B ;

2- Déterminer les coordonnées du *C.I.R.* (centre instantanée de rotation) géométriquement et analytiquement.





Solution :

Au point B nous avons un glissement sans frottement ; $AC = 2L$; le repère R_0 est le repère de projection. $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: est tel que $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$; $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$

1. Vitesse de glissement aux points A et B

Les coordonnées de A et B dans le repère R_0 sont : $\overrightarrow{OA} = \begin{cases} 0 \\ -a\,tg\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$

$$\vec{V}^0(A) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OA}}{dt} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{a\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

Comme A et B appartiennent tous les deux à la barre, la vitesse $\vec{V}^0(B)$ se déduit par la cinématique du solide : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{V}^0(B) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{a\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} a \\ a\,tg\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} -a\dot{\alpha}\,tg\alpha \\ -\dfrac{a\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} + a\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

3- Coordonnées du *C.I.R.* (centre instantanée de rotation).

a) Géométriquement

On sait que la vitesse du centre instantané est nulle. En utilisant la relation de la cinématique du solide nous pouvant déterminer la vitesse du point I à partir de A où de B :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{AI} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{V}^0(A) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IA} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}^0(A) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(A) \perp \vec{IA} \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{BI} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \vec{V}^0(B) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{IB} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}^0(B) \perp \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(B) \perp \vec{IB} \end{cases}$$

Alors, en traçant une perpendiculaire à $\vec{V}^0(A)$ en *A* et une autre perpendiculaire à $\vec{V}^0(B)$ en *B*, l'intersection de ces deux droites nous donne le centre instantané de rotation.

a) Analytiquement

On doit chercher les coordonnées du centre instantané de rotation. Le mouvement de la barre est un mouvement plan. On cherche un point $I \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}$ tel que $\vec{V}^0(I) = \vec{0}$. en effet nous avons :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{AI} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ -\dfrac{a\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0+ \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \underset{R_0}{\begin{cases} x \\ y + atg\alpha \\ 0 \end{cases}} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$-\dot{\alpha}(y + atg\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -atg\alpha$$

$$-\frac{a\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} + \dot{\alpha}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{\cos^2\alpha}$$

Exercice 07 :

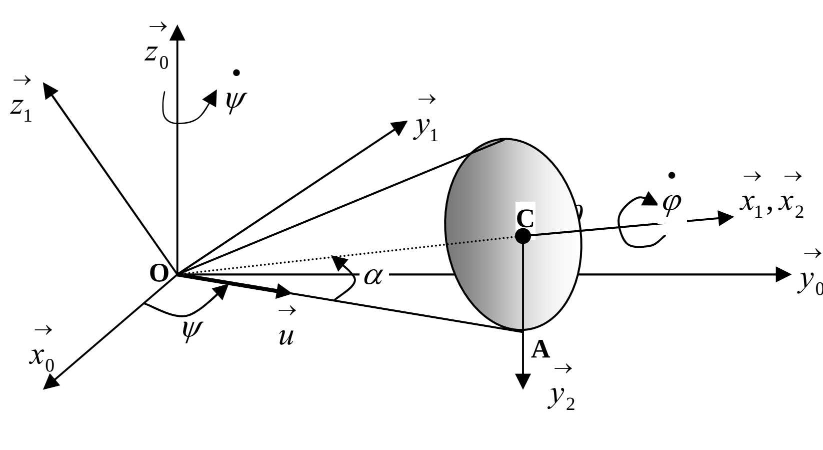
Un cône de rayon ***R***, de hauteur ***h*** et demi angle au sommet α , en contact avec le plan horizontal ***(OX₀Y₀)*** suivant l'une de ses génératrices. Le cône roule sans glisser sur le plan (OX_0Y_0) . Le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est le repère fixe.

1) Déterminer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}_2^0$ du cône dans le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$;

2) Ecrire la condition de roulement sans glissement ;

3) En déduire la relation liant, $\vec{\Omega}_2^0$, $\dot{\psi}$ et α ;

4) En déduire $\vec{\Omega}_2^0$ en fonction de $\dot{\psi}$, R et h .



$\vec{u} \in \overrightarrow{OA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OA} \in$ au plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ $\qquad$ $\alpha = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

Solution :

$OC = h$; $CA = R$; $\alpha = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en rotation tel que : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

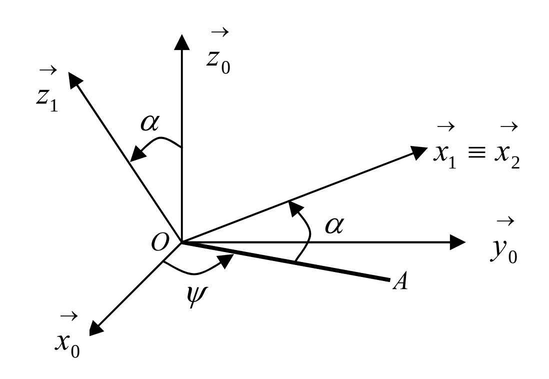
$R_2(C,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ lié au cône tel que : $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\varphi}\,\vec{x}_1$

$(O,\vec{x}_1)$ est l'axe du cône ; $(O,\vec{y}_1) \in (\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ et $(O,\vec{y}_1) \perp (O,\vec{x}_1)$ l'axe $(O,\vec{z}_1)$ termine la construction du trièdre directe.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la génératrice OA du cône. Nous avons : $\psi = (\vec{x}_0,\vec{u})$

1. Vecteur rotation instantanée du cône par rapport au repère R_0

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$



Or , nous avons :

$$\vec{z}_0 = \sin\alpha\,\vec{x}_1 + \cos\alpha\,\vec{z}_1$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \dot{\varphi}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\left(\sin\alpha\,\vec{x}_1 + \cos\alpha\,\vec{z}_1\right)$$

$$\vec{\Omega}_2^0 = \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha\right)\vec{x}_1 + \dot{\psi}\cos\alpha\,\vec{z}_1$$

2. Condition de roulement sans glissement ;

Du fait du roulement sans glissement du cône sur le plan horizontal, tous les points en contact du plan suivant la génératrice OA ont une vitesse nulle, en particulier les points O et A.

Comme les deux points appartiennent au même solide, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}^0(A) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OA} = \vec{0} \quad \text{or} \quad \vec{V}^0(O) = \vec{0}$$

ce qui donne : $\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{OA} = \vec{0}$, cette expression montre que $\vec{\Omega}_2^0 \;//\; \vec{OA}$

or nous savons que $\vec{OA} \perp \vec{z}_0$ alors nous avons aussi : $\vec{\Omega}_2^0 \perp \vec{z}_0$ se qui se traduit par :

$\vec{\Omega}_2^0 \bullet \vec{z}_0 = 0$ en remplaçant $\vec{\Omega}_2^0$ par son expression on obtient :

$$\vec{\Omega}_2^0 \bullet \vec{z}_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha\right)\vec{x}_1 \bullet \vec{z}_0 + \left(\dot{\psi}\cos\alpha\right)\vec{z}_1 \bullet \vec{z}_0 = 0$$

$$\vec{x}_1 \bullet \vec{z}_0 = |\vec{x}_1||\vec{z}_0|\cos(\vec{x}_1, \vec{z}_0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\vec{z}_1 \bullet \vec{z}_0 = |\vec{z}_1||\vec{z}_0|\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\alpha\right)\sin\alpha + \left(\dot{\psi}\cos\alpha\right)\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\psi} = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{\varphi} = -\frac{\dot{\psi}}{\sin\alpha}$$

3. Relation liant, $\vec{\Omega}_2^0$, $\dot{\psi}$ et α

On remplace $\dot{\varphi}$ dans l'expression de $\vec{\Omega}_2^0$, ce qui donne :

$$\vec{\Omega}_2^0 = \left(-\frac{\dot{\psi}}{\sin\alpha} + \dot{\psi}\sin\alpha \right)\vec{x}_1 + \dot{\psi}\cos\alpha\,\vec{z}_1 = \dot{\psi}\cos\alpha\left(-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\vec{x}_1 + \vec{z}_1 \right)$$

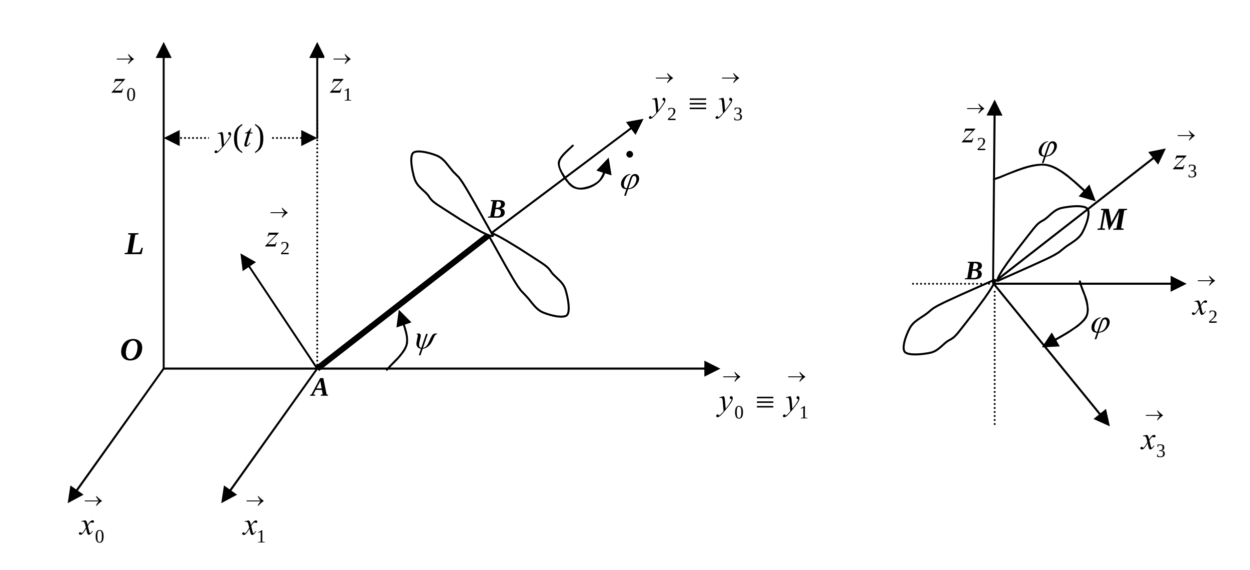
4. $\vec{\Omega}_2^0$ en fonction de $\dot{\psi}$, R et h

Comme nous avons $\sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}$ et $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$

On obtient : $\vec{\Omega}_2^0 = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\dot{\psi}\left(-\dfrac{h}{R}\vec{x}_1 + \vec{z}_1 \right)$

Exercice N°08 :

Soit le dispositif mécanique composé d'une barre homogène ***AB*** de longueur ***L***, de masse ***m*** et d'une hélice de rayon ***R***, de masse ***M***. Le point A de la barre se déplace sur l'axe $\vec{y}_0$ et la barre tourne avec une vitesse angulaire constante $\dot{\psi}$ autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$. L'hélice tourne autour de l'axe $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ avec une vitesse angulaire constante : $\dot{\varphi}$.



On prendra R_2 comme repère relatif et de projection.

Le moment d'inertie de l'hélice au point B , exprimé dans le repère R_2 est donné par:

$$I_{B/R_2} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 2C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

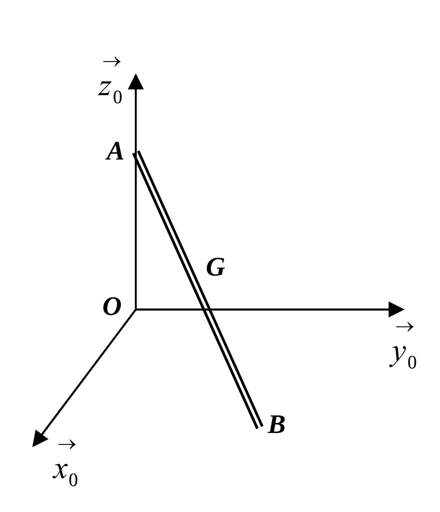
Déterminer:

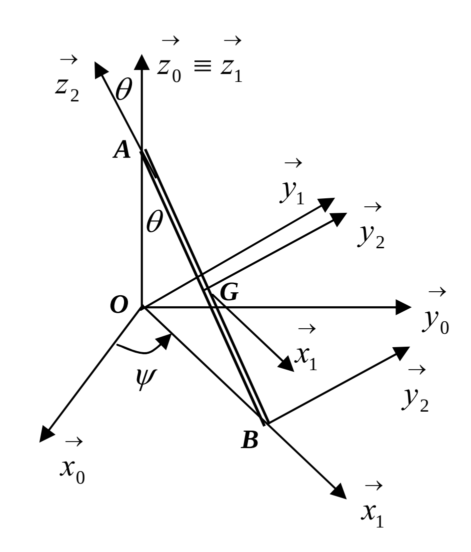
1. Le centre d'inertie du système barre + hélice dans le repère R_2 ;
2. Le tenseur d'inertie du système barre + hélice au point A dans le repère R_2 ;
3. La matrice de passage de R_1 vers R_2 et de R_3 vers R_2 ;
4. La vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_3^0$ de l'hélice par rapport à R_0 ;
5. La vitesse $\vec{V}^0(A)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(A)$ par dérivation ;
6. La vitesse $\vec{V}^0(B)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(B)$ par par la cinématique du solide ;
7. La vitesse et l'accélération absolues du points M par composition de mouvement ;

Exercice 09 :

Une tige homogène de longueur $\boldsymbol{AB = L}$ et de centre $\boldsymbol{G}$ est en mouvement tel que, son extrémité $\boldsymbol{A}$ soit assujetti à se déplacer suivant l'axe vertical $(O, \vec{z}_0)$ d'un repère orthonormé fixe $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. L'autre extrémité $\boldsymbol{B}$ est en mouvement quelconque dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

1. Déterminer le nombre de paramètres nécessaires pour décrire totalement le mouvement de la tige et construire les différents repères permettant de faire l'étude cinématique de la tige ;
2. Déterminer la vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0
3. Déterminer les différentes figures planes et les matrices de passage;
4. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue des points A, B et G exprimé dans le repère R_1.





Solution :

1. Repères et paramètres permettant l'étude du mouvement de la tige

$AB = L$; $A \in (O, \vec{z}_0)$ tous le temps, $B \in (x_0 O y_0)$

$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$, $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ et $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère tel que : $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$, $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \psi$ et $\vec{\Omega}_2^1 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 = -\dot{\theta}\,\vec{y}_2$

on a ainsi : $AB \in R_2$ tel que : $\overrightarrow{BA} = L\,\vec{z}_2$

Les deux angles ψ et θ sont suffisant pour décrire entièrement le mouvement de la barre par rapport au repère R_0.

2. Vitesse instantanée de rotation de la barre par rapport à R_0

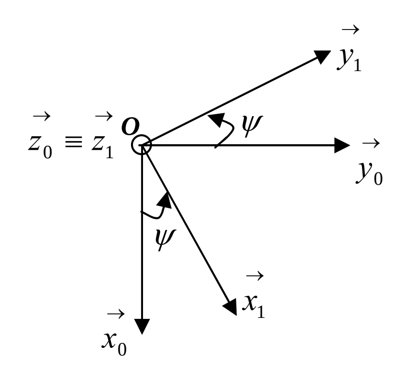
Nous avons : $\vec{\Omega}_2^0 \equiv \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{cases}}$

3. Figure plane de chaque repère ;

3.1. Matrice de passage du repère R_0 vers R_1

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

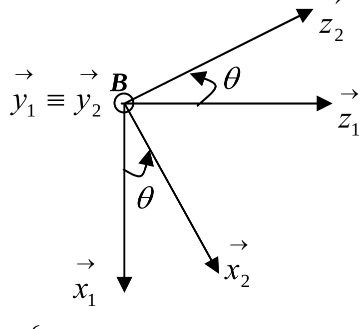
$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad P_{R_0 \to R_1}$$



3.1. Matrice de passage du repère R_2 vers R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{R_2 \to R_1}$$



$$\vec{\Omega}_2^0 \equiv -\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = -\dot{\theta}(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \begin{cases} \dot{\theta}\sin\psi \\ -\dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_0}$$

On prendra R_1 comme repère de projection car les expressions cinématiques sont plus simples dans ce repère.

4. Vitesse et Accélération absolue des points *A, B* et *G* exprimé R_1.

Nous avons : $\vec{OA} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L\cos\theta \end{cases}_{R_1}$, $\vec{OB} = \begin{cases} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$, $\vec{OG} = \dfrac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \begin{cases} \dfrac{L}{2}\sin\theta \\ 0 \\ \dfrac{L}{2}\cos\theta \end{cases}_{R_1}$

4.1. *calcul de* $\vec{V}^0(A)$ **:** $\vec{V}^0(A) = \dfrac{d^0\,\vec{OA}}{dt} = \dfrac{d^1\,\vec{OA}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{OA}$

$$\vec{V}^0(A) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L\cos\theta \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}_{R_1}$$

4.2. calcul de $\vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B)=\frac{d^0\,\overrightarrow{OB}}{dt}=\frac{d^1\,\overrightarrow{OB}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{OB}$$

$$\vec{V}^0(B)=\underset{R_1}{\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\0\\0\end{cases}}+\underset{R_1}{\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}}\wedge\underset{R_1}{\begin{cases}L\sin\theta\\0\\0\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}}$$

La vitesse du point B peut aussi s'obtenir à partir de celle de A par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(B)=\vec{V}^0(A)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}^0(B)=\underset{R_1}{\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}+\underset{R_1}{\begin{cases}0\\-\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{cases}}\wedge\underset{R_1}{\begin{cases}L\sin\theta\\0\\-L\cos\theta\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\-L\dot{\theta}\sin\theta+L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}L\dot{\theta}\cos\theta\\L\dot{\psi}\sin\theta\\0\end{cases}}$$

4.3. calcul de $\vec{V}^0(G)$: $\vec{V}^0(G)=\dfrac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt}=\dfrac{d^1\,\overrightarrow{OG}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{OG}$

$$\vec{V}^0(G)=\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\0\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}+\underset{R_1}{\begin{cases}0\\0\\\dot{\psi}\end{cases}}\wedge\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\sin\theta\\0\\\frac{L}{2}\cos\theta\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}$$

La vitesse du point G peut aussi s'obtenir à partir de celle de A où de B par la cinématique du solide, en effet nous avons :

$$\vec{V}^0(G)=\vec{V}^0(A)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AG}$$

$$\vec{V}^0(G)=\underset{R_1}{\begin{cases}0\\0\\-L\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}+\underset{R_1}{\begin{cases}0\\-\dot{\theta}\\\dot{\psi}\end{cases}}\wedge\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\sin\theta\\0\\-\frac{L}{2}\cos\theta\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-L\dot{\theta}\sin\theta+\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta\\\frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta\\-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}}$$

4.4. calcul de $\vec{\gamma}^0(A)$ **:** $\vec{\gamma}^0(A) = \dfrac{d^0 \vec{V}^0(A)}{dt} = \dfrac{d^1 \vec{V}^0(A)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(A)$

$$\vec{V}^0(A) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L\ddot{\theta}\sin\theta - L\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}}$$

4.5. calcul de $\vec{\gamma}^0(B)$ **:** $\vec{\gamma}^0(B) = \dfrac{d^0 \vec{V}^0(B)}{dt} = \dfrac{d^1 \vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(B)$

$$\vec{V}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} L\ddot{\theta}\cos\theta - L\dot{\theta}^2\sin\theta \\ L\ddot{\psi}\sin\theta + L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L\dot{\theta}\cos\theta \\ L\dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{V}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} L\ddot{\theta}\cos\theta - L(\dot{\theta}^2 + L\dot{\psi}^2)\sin\theta \\ L\ddot{\psi}\sin\theta + 2L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{cases}}$$

4.6. calcul de $\vec{\gamma}^0(G)$ **:** $\vec{\gamma}^0(G) = \dfrac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = \dfrac{d^1 \vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G)$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta + \frac{L}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ \frac{L}{2}\dot{\psi}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \underset{R_1}{\begin{cases} \frac{L}{2}\ddot{\theta}\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta - \frac{L}{2}\dot{\psi}^2\sin\theta \\ \frac{L}{2}\ddot{\psi}\sin\theta + L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\ddot{\theta}\sin\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta \end{cases}}$$

CHAPITRE VII

CINEMATIQUE DES SOLIDES EN CONTACTS

CINEMATIQUE DES SOLIDES EN CONTACT

1. Mouvement de deux solides en contact

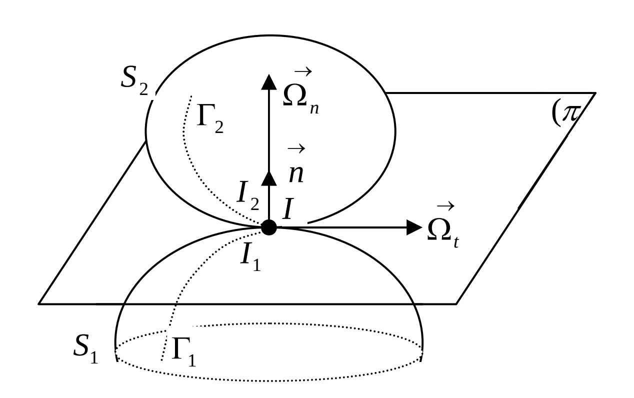
Soient deux solides (S_1) et (S_2) liés aux repères R_1 et R_2 mobiles par rapport à un repère fixe R_0. Les deux solides en mouvement sont assujettis à un contact ponctuel à tout instant en un point fixe I appartenant au plan (π) tangent en ce point aux deux solides.

$\vec{n}$: la normale au plan (π)

$\vec{\Omega}_t \in (\pi)$

$\vec{\Omega}_n \perp (\pi)$

Au point de contact des deux solides nous pouvons distinguer :



- $I_1 \in S_1$: point du solide S_1 en contact avec le solide S_2 à l'instant t ;
- $I_2 \in S_2$: point du solide S_2 en contact avec le solide S_1 au même instant t ;
- $I \in R_0$: la position commune de $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ au même instant t ;

Le point géométrique I n'appartient ni à S_1 ni à S_2 . Les points I, I_1, I_2 occupent géométriquement la même position mais ils ont des rôles cinématiques différents.

L'ensemble des points $I \in R_0$ constitue une courbe Γ d'écrite sur le plan (π)

L'ensemble des points $I_1 \in S_1$ constitue une courbe Γ_1 d'écrite sur le solide S_1

L'ensemble des points $I_2 \in S_2$ constitue une courbe Γ_2 d'écrite sur le solide S_2

La vitesse de glissement du solide du solide S_2 par rapport au solide S_1 appartient au plan (π) tangent au point de contact. Soit M_1 un point du solide S_1 et M_2 un point du solide

S_2 ; d'après ce que l'on a vu précédemment sur le champ des vitesses des points d'un solide, nous pouvons écrire dans le repère fixe :

$$\vec{V}^0(I_1) = \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{M_1 I_1}$$

$$\vec{V}^0(I_2) = \vec{V}^0(M_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{M_2 I_2}$$

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est donnée par la relation :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1)$$

Comme les trois points occupent la même position géométrique nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{M_2 I_2} - \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{M_1 I_1}$$

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(M_2) - \vec{V}^0(M_1) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Le vecteur rotation du solide S_2 par rapport au solide S_1 a pour expression : $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{\Omega}_2^0 - \vec{\Omega}_1^0$

D'où : $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$ on retrouve ici la loi de Chasles.

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_2^1$ du solide S_2 par rapport au solide S_1 a deux composantes, l'une tangent et dans le plan $\vec{\Omega}_t \in (\pi)$, l'autre normale au plan : $\vec{\Omega}_n \perp (\pi)$: $\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_t + \vec{\Omega}_n$

$\vec{\Omega}_t = \vec{n} \wedge (\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{n})$: Vecteur rotation de roulement du solide S_2 par rapport au solide S_1 ;

$\vec{\Omega}_n = (\vec{\Omega}_2^1 \bullet \vec{n})\,\vec{n}$: Vecteur rotation de pivotement du solide S_2 par rapport au solide S_1

En général, lorsque deux solides sont en contact ponctuel, il peut y avoir :

Glissement , roulement et pivotement de l'un sur l'autre.

La condition de roulement sans glissement est vérifiée lorsque la vitesse de glissement est nulle : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(I_2) = \vec{V}^0(I_1)$

Si le solide S_1 est fixe alors : $\vec{V}^0(I_1) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(I_2) = \vec{V}^0(I_1) = \vec{0}$

Dans ce cas, quel que soit $M \in S_2$, avec S_2 en roulement sans glissement par rapport au solide S_1 , nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(I_1) + \vec{\Omega}_2^1 \wedge \overrightarrow{I_1 M}$;

comme $\vec{V}^{0}(I_1)=\vec{0}$ alors : $\vec{V}^{0}(M)=\vec{\Omega}_2^1\wedge \overrightarrow{I_1M}$

- Si $\vec{V}_g(I)=\vec{0}$: on dit que le solide S_2 roule sans glisser sur le solide S_1 ;
- Si $\vec{\Omega}_n=\vec{0}$: on dit que le solide S_2 ne pivote pas sur le solide S_1 ;
- Si $\vec{\Omega}_n=\vec{0}$: on dit que le solide S_2 ne roule pas, il glisse sur le solide S_1 ;

1.1. Mouvement de deux solides en contact en plusieurs points

Dans le cas où deux solides sont en contact en plusieurs points, les considérations précédentes peuvent être reprise en chaque point de contact.

Cas particuliers :

- Si deux solides S_2 et S_1 sont en contact en deux points A et B et si la vitesse de glissement en ces deux points est nulle $\vec{V}^{0}(A)=\vec{V}^{0}(B)=\vec{0}$ alors le vecteur rotation $\vec{\Omega}_2^1$ est un vecteur directeur de la droite AB passant par les deux points :

$$\vec{V}^{0}(B)=\vec{V}^{0}(A)+\vec{\Omega}_2^1\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow\ \vec{\Omega}_2^1\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad \vec{\Omega}_2^1 // \overrightarrow{AB}$$

- Si deux solides S_1 et S_2 sont en contact en plus de deux points et si la vitesse de glissement est nulle en tous ces points, ils sont nécessairement portés par le même axe donc ils sont alignés.

1.2 Transmission par friction d'un mouvement de rotation entre deux cylindres

Soient deux cylindres S_1 et S_2 de rayons respectifs R_1 et R_2 liés à un bâti fixe et ayant des mouvement de rotation d'axes respectifs $(O,\vec{z}_1)$ et $(O,\vec{z}_2)$

Leur vitesse de rotation respective est donnée par : $\vec{\Omega}_1^0=\Omega_1^0\,\vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}_2^0=-\Omega_2^0\,\vec{z}_1$

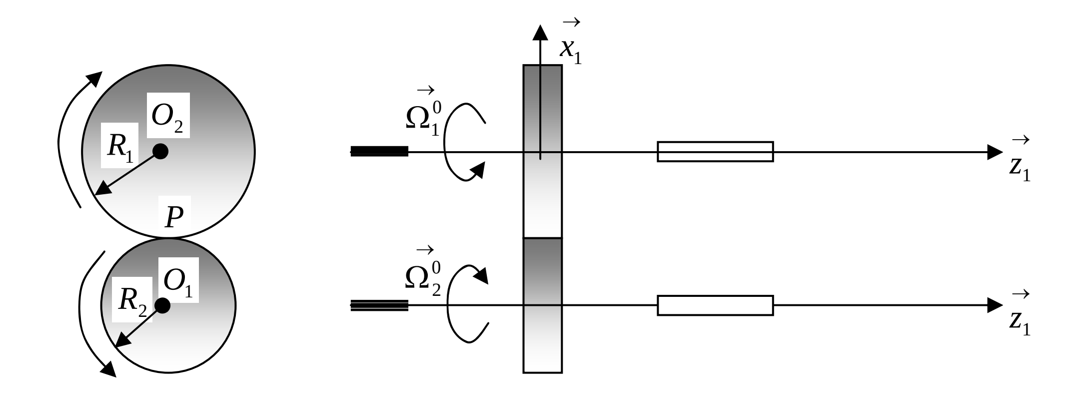
Soit P un point de contact entre les deux solides. Les axes de rotation sont parallèles à : $\vec{z}_1$.

La condition de roulement sans glissement au point P s'écrira : $\vec{V}^{0}(P)=\vec{0}$

Le point de contact P peut être associé au solide S_1 et S_2 , par la cinématique du solide nous pouvons écrire : $P \in S_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P}$

$P \in S_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(O_2) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2P}$

or nous avons $\vec{V}^0(P) = \vec{0}$ et les points O_1 et O_2 alors : $\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2P}$



Dans la transmission de mouvement par friction, les deux cylindres ont des mouvements de rotation de sens contraire si le contact se fait à l'extérieur et de même sens si le contact se fait à l'intérieur des cylindres.

Les points O_1, O_2, P sont alignés. Si $\overrightarrow{O_1P} = -R_1\,\vec{x}_1$ alors $\overrightarrow{O_2P} = R_2\,\vec{x}_1$

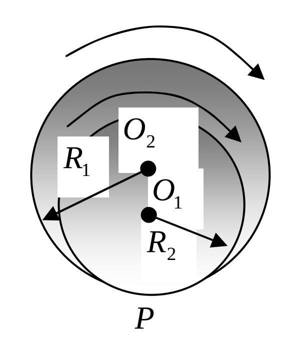
D'où : $\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2P} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_1^0\,\vec{z}_1 \wedge -R_1\,\vec{x}_1 = \Omega_2^0\,\vec{z}_1 \wedge R_2\,\vec{x}_1$

$$-\Omega_1^0 R_1 = \Omega_2^0 R_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega_1^0}{\Omega_2^0} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Si le contact se fait à l'intérieur (cylindre S_2 à l'intérieur du cylindre S_1) les deux cylindres tourneront dans le même sens :

D'où : $\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P} = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{O_2P} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_1^0\,\vec{z}_1 \wedge R_1\,\vec{x}_1 = \Omega_2^0\,\vec{z}_1 \wedge R_2\,\vec{x}_1$

$$\Omega_1^0 R_1 = \Omega_2^0 R_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Omega_1^0}{\Omega_2^0} = \frac{R_2}{R_1}$$

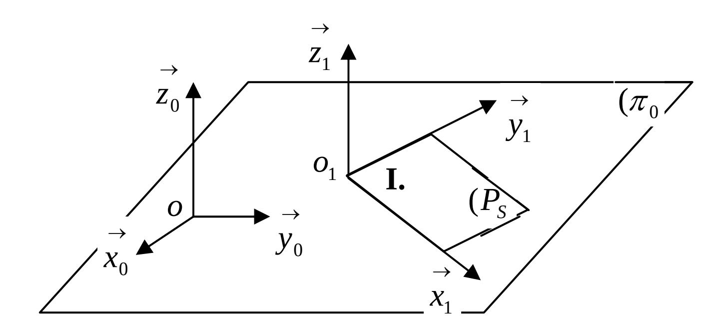


2. Mouvement plan sur plan

2.1. Définition

Le mouvement d'un solide *(S)* lié à un repère $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par rapport à un repère fixe $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est un mouvement plan sur plan si et seulement si, un plan (P_S) du solide reste en coïncidence avec un plan (π_0) lié au repère $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

On étudie ainsi le mouvement relatif de deux plans, l'un constituant le référentiel fixe. Les vecteurs $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ sont orthogonaux aux plans (P_S) et (π_0) respectivement en O et O_1.



Le vecteur rotation instantané du solide *(S)* lié à $R_1(O_1,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ par rapport au repère fixe $R_0(O_0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est donné par : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

Tous les points du solide se déplacent parallèlement au plan (π_0), leurs vecteurs vitesses sont aussi parallèles à ce plan, alors $\forall P \in (S)$ nous aurons :

$$\vec{V}^0(P) = f(t)\,\vec{x}_0 + g(t)\,\vec{y}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(P) \bullet \vec{z}_0 = 0$$

On remarque dans ce cas que l'automoment $\vec{V}^0(P) \bullet \vec{\Omega}_1^0 = 0$ du torseur cinématique $[C]_P = \begin{cases} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(P) \end{cases}$, décrivant le mouvement est nul. En effet nous avons :

$\vec{V}^0(P) \bullet \vec{\Omega}_1^0 = \left(f(t)\,\vec{x}_0 + g(t)\,\vec{y}_0 \right) \bullet \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = 0$, nous pouvons conclure que :

- Si $\psi = Cte \Rightarrow \Omega_1^0 = \dot{\psi} = 0$, la résultante du torseur étant nul, alors le torseur est un couple et le mouvement est une translation rectiligne sur le plan (π_0), l'axe central du torseur reste indéfini ;
- Si ψ varie au cours du temps, alors $\Omega_1^0 = \dot{\psi}$, dans ce cas le torseur est un glisseur dont l'axe central est l'axe instantané de rotation orthogonal au plan (π_0) donc parallèle à $\vec{z}_0$.

2.2. Paramétrage du solide

la position du solide est déterminée par :

a) La position du point $O_1 \in (S)$ dans le repère R_0 est donnée par :

$$\overrightarrow{OO_1} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 = \underset{R_0}{\begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}}$$

b) L'orientation du repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ définie par la vitesse de rotation : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$ tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$

Le passage du repère R_0 vers le repère R_1 s'exprime par les relations suivantes :

$$\vec{x}_1 = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{y}_1 = -\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

La matrice de passage de R_1 vers R_0 est donnée par :

$$P_{R_1 \rightarrow R_0} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le mouvement plan sur plan est un mouvement à trois degrés de liberté : (x, y, ψ) ; deux degrés de translation et un degré de rotation.

2.3. Vecteurs vitesse et accélération d'un point quelconque du solide

Si P est un point quelconque du solide *(S)*, il aura pour coordonnées :

Dans R_1 : $\overrightarrow{O_1P} = a\,\vec{x}_1 + b\,\vec{y}_1$, le point P est fixe dans le solide.

Dans R_0 : $\overrightarrow{O_1P} = a\,\vec{x}_1 + b\,\vec{y}_1 = a(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0) + b(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0)$

$$\overrightarrow{O_1P} = (a\cos\psi - b\sin\psi)\,\vec{x}_0 + (a\sin\psi + b\cos\psi)\,\vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{O_1P} = \begin{cases} a\cos\psi - b\sin\psi \\ a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

Dans R_0 : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 + (a\cos\psi - b\sin\psi)\,\vec{x}_0 + (a\sin\psi + b\cos\psi)\,\vec{y}_0$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x + a\cos\psi - b\sin\psi \\ y + a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

La vitesse du point P par rapport à R_0 se déduit de deux façons :

a) Par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1P} = \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} a\cos\psi - b\sin\psi \\ a\sin\psi + b\cos\psi \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{V}^0(P) = \begin{cases} \dot{x} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\dot{\psi} \\ \dot{y} + (a\cos\psi - b\sin\psi)\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

b) Par dérivation :

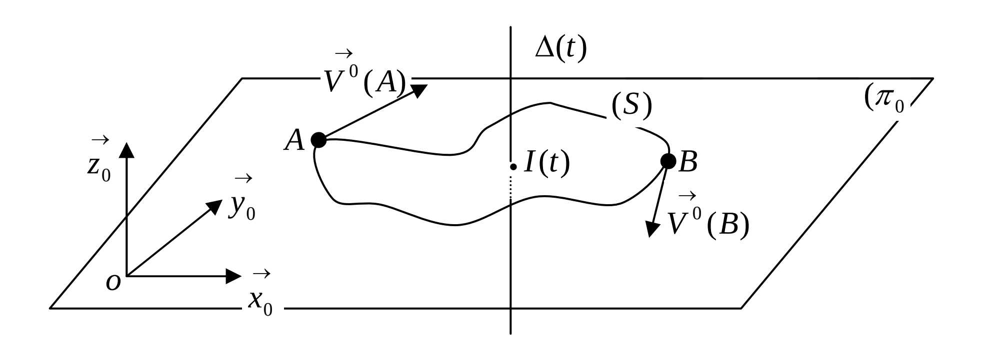
$$\vec{V}^0(P) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OP}}{dt} = \begin{cases} \dot{x} - a\dot{\psi}\sin\psi - b\dot{\psi}\cos\psi \\ \dot{y} + a\dot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} \dot{x} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\dot{\psi} \\ \dot{y} + (a\cos\psi - b\sin\psi)\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

L'accélération du point P par rapport à R_0 se déduit facilement par dérivation du vecteur vitesse $\vec{V}^0(P)$, dans le même repère.

$$\vec{V}^0(P) = \frac{d^0\vec{V}^0(P)}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\ddot{\psi} - (a\cos\psi - b\sin\psi)\dot{\psi}^2 \\ \ddot{y} + (a\cos\psi - b\sin\psi)\ddot{\psi} - (a\sin\psi + b\cos\psi)\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

2.4. Centre instantané de rotation

Soient deux points A et B du solide *(S)* lié à un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement par rapport au repère fixe $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au plan (π_0)



Comme les vitesses $\vec{V}^0(A)$ et $\vec{V}^0(B)$ appartiennent au solide et au plan (π_0), nous pouvons écrire d'après la loi de distribution des vitesses :

$$\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{AB}$$

où $\vec{\Omega}_1^0$ est la vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 . Le vecteur vitesse de rotation instantané est normal au plan (π_0), ce qui entraîne que l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$ est perpendiculaire à (π_0) .

L'étude sur les torseurs a montré que quel que soit le point pris sur l'axe central d'un torseur, le moment en ce point est parallèle à l'axe central.

Dans le cas d'un torseur cinématique, tous les points de l'axe instantané de rotation (axe central) ont une vitesse parallèle à cet axe. De plus dans le cas d'un mouvement plan sur plan tous les points du solide ont leurs vitesses parallèles au plan (π_0). Par conséquent, le point d'intersection I entre le plan (π_0) et l'axe instantané de rotation $\Delta(t)$, a une vitesse nulle.

Ce point est appelé centre instantané de rotation : ***(C.I.R.)***

2.4.1. Détermination analytique du centre instantané de rotation *(C.I.R.)*

Soit P un point quelconque du solide. La loi distribution des vitesses nous permet d'écrire :

$$\vec{V}^0(P) = \vec{V}^0(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IP} = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IP}$$

La position du ***C.I.R*** s'obtient en multipliant vectoriellement cette expression par $\vec{\Omega}_1^0$:

$$\vec{V}^0(P) \wedge \vec{\Omega}_1^0 = \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IP}\right) \wedge \vec{\Omega}_1^0 = \left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2 \overrightarrow{IP}$$

d'où : $$\overrightarrow{IP} = \frac{\vec{V}^0(P) \wedge \vec{\Omega}_1^0}{\left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2}$$

- le vecteur $\overrightarrow{IP}$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{V}^0(P)$ au point P ;
- il a pour module : $\left\|\overrightarrow{IP}\right\| = \dfrac{\left\|\overrightarrow{V^0(P)}\right\|}{\Omega_1^0}$

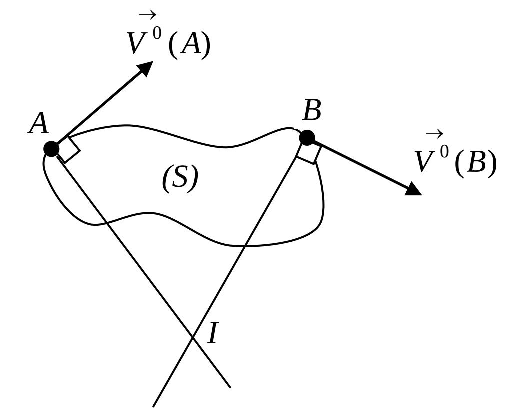
2.4.2. Détermination géométrique du centre instantané de rotation *(C.I.R)*

Si le point I est un centre instantané de rotation du solide (S) , nous pouvons le déterminer géométriquement en connaissant la vitesse de deux points A et B du solide.

En effet nous avons :

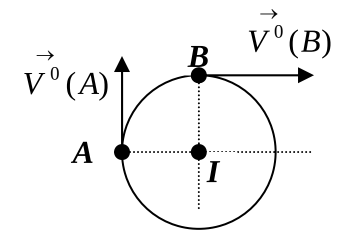
$$\vec{V}^0(A) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IA} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(A) \perp \overrightarrow{IA}$$

$$\vec{V}^0(B) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{IB} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(B) \perp \overrightarrow{IB}$$



Le centre instantané de rotation **(C.I.R.)** se trouve à l'intersection des normales aux vecteurs vitesses $\vec{V}^0(A)$ à partir du point A et $\vec{V}^0(B)$ à partir du point B. Cette méthode est souvent utilisée pour vérifier les coordonnées du **(C.I.R.)** déterminé déjà analytiquement.

Dans le cas particulier d'un disque, il est très facile de le vérifier :
Les vitesses aux points A et B sont tangentes aux disques.
En traçant les deux perpendiculaires aux vitesses
Respectivement en A et B, leur point d'intersection
est le point I centre du disque ayant une vitesse nulle.



3. Base et roulante

Le centre instantané de rotation **(C.I.R.)** est un point mobile par rapport à R_0 et par rapport au repère R_1 lié au solide. Il décrit deux courbes différentes dans les deux repères, on appelle alors :

- ***Base du mouvement :*** du plans (P_S) du solide sur le plan (π_0), la trajectoire du point I dans le repère R_0 ;
- ***Roulante du mouvement :*** du plans (P_S) du solide sur le plan (π_0), la trajectoire du point I dans le repère R_1 ;

Nous pouvons exprimer le vecteur vitesse du point I dans le repère R_0, nous avons en effet :

$$\vec{V}^0(I) = \frac{d^0 \overrightarrow{OI}}{dt} = \frac{d^0(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1I})}{dt} = \vec{V}^0(O_1) + \frac{d^0 \overrightarrow{O_1I}}{dt}$$

En introduisant les coordonnées du point I dans le repère R_1 tel que :

$$\overrightarrow{O_1I} = x_I\, \vec{x}_1 + y_I\, \vec{y}_1 = \underset{R_1}{\begin{cases} x_I \\ y_I \\ 0 \end{cases}} \quad ;$$

Par la formule de la cinématique du solide nous pouvons écrire :

$$\frac{d^0 \overrightarrow{O_1I}}{dt} = \frac{d^1 \overrightarrow{O_1I}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1I} = \vec{V}^1(I) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1I}$$

on obtient finalement $\vec{V}^0(I) = \vec{V}^1(I) + \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 I}$

Comme le point I est le centre instantané de rotation, son expression analytique est donnée

par : $\overrightarrow{O_1 I} = \dfrac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1 I} = -\vec{V}^0(O_1)$

On obtient alors : $\underline{\vec{V}^0(I) = \vec{V}^1(I)}$

Cette égalité indique que la vitesse du centre instantané de rotation est la même dans les deux repères à R_0 et R_1.

Il en résulte que la base et la roulante sont deux courbes tangentes en I à chaque instant. L'égalité des vitesses au point I dans les deux repères montre que la roulante roule sans glisser sur la base.

3.1. Equation de la base

La position du point O_1 centre du repère R_1 lié au solide par rapport au repère fixe R_0 est définie par ses coordonnées dans le repère R_0 : $\overrightarrow{OO_1} = x\,\vec{x}_0 + y\,\vec{y}_0 = \begin{cases} x \\ y \\ 0 \end{cases}_{R_0}$;

La position du point I dans le repère R_1 est donnée par : $\overrightarrow{O_1 I} = \dfrac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\left(\vec{\Omega}_1^0\right)^2}$ qui s'écrit

aussi sous la forme : $\overrightarrow{O_1 I} = \dfrac{\dot{\psi}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\dot{\psi}^2}$, or nous avons :

$$\vec{V}^0(O_1) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OO_1}}{dt} = \frac{d^0\,\overrightarrow{OO_1}}{d\psi}\frac{d^0\psi}{dt} = \dot{\psi}\frac{d^0\,\overrightarrow{OO_1}}{d\psi} = \dot{\psi}\frac{dx}{d\psi}\vec{x}_0 + \dot{\psi}\frac{dy}{d\psi}\vec{y}_0$$

En remplaçant l'expression de $\vec{V}^0(O_1)$ dans celle de $\overrightarrow{O_1 I}$ nous obtenons :

$$\overrightarrow{O_1 I} = \frac{\dot{\psi}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\dot{\psi}^2} = \vec{z}_0 \wedge \left(\frac{dx}{d\psi}\vec{x}_0 + \frac{dy}{d\psi}\vec{y}_0\right) = \frac{dx}{d\psi}\vec{y}_0 - \frac{dy}{d\psi}\vec{x}_0$$

Ainsi le vecteur position du point I dans le repère R_0 est exprimé par la relation :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1I} = (x - \frac{dy}{d\psi}\vec{x}_0) + (y + \frac{dx}{d\psi}\vec{y}_0)$$

Cette équation définit la trajectoire (appelée base) du centre instantané de rotation dans le repère R_0. $\overrightarrow{OI} = \begin{cases} X_I(t) = x - \dfrac{dy}{d\psi}\vec{x}_0 \\ Y_I(t) = y + \dfrac{dx}{d\psi}\vec{y}_0 \\ Z_I(t) = 0 \end{cases}_{R_0}$

3.2. Equation de la roulante

Pour obtenir la trajectoire *(appelée roulante)* dans le repère R_1 lié au solide, il suffit d'exprimer les vecteurs unitaires du repère R_0 en fonction de ceux de R_1. En effet, nous avons d'après la matrice de passage déterminée précédemment :

$$\vec{x}_0 = \cos\psi\,\vec{x}_1 - \sin\psi\,\vec{x}_1$$

$$\vec{y}_0 = \sin\psi\,\vec{x}_1 + \cos\psi\,\vec{x}_1$$

$$\overrightarrow{O_1I} = \frac{\dot{\psi}\,\vec{z}_0 \wedge \vec{V}^0(O_1)}{\dot{\psi}^2} = \vec{z}_0 \wedge \left(\frac{dx}{d\psi}\vec{x}_0 + \frac{dy}{d\psi}\vec{y}_0\right) = \frac{dx}{d\psi}\vec{y}_0 - \frac{dy}{d\psi}\vec{x}_0$$

Alors la trajectoire dans le repère R_1 aura pour équations paramétriques :

$$\overrightarrow{O_1I} = \begin{cases} X_{I1}(t) = \dfrac{dx}{d\psi}\sin\psi - \dfrac{dy}{d\psi}\cos\psi \\ Y_{I1}(t) = \dfrac{dx}{d\psi}\cos\psi y + \dfrac{dy}{d\psi}\sin\psi \\ Z_{I1}(t) = 0 \end{cases}_{R_0}$$

En connaissant la matrice de passage de R_0 vers R_1, il est très facile de déduire la trajectoire de la roulante à partir de la base où inversement.

CHAPITRE VIII

CINETIQUE

CINETIQUE

1. Définition

La résultante cinétique (quantité de mouvement), **le moment cinétique** (moment de la quantité de mouvement), **la résultante dynamique** (quantité d'accélération), **le moment dynamique** et **l'énergie cinétique**, constituent les éléments de la cinétique.

La cinétique a pour objet l'étude des relations entre les éléments de la cinématique et la géométrie des masses.

2. Résultante cinétique, moment cinétique

- La résultante cinétique (quantité de mouvement) d'un point matériel M, de masse m et de vitesse $\vec{V}(M)$ est définie par la grandeur vectorielle :

$$\vec{P} = m\vec{V}(M) \ ;$$

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du point matériel M en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M)$$

2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel *(S)*

a) Système matériel discret :

Le système est constitué d'un ensemble de point M_i de masse m_i et de vitesses $\vec{V}(M_i)$ dans un repère *R*.

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}(M_i)$

- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)$

b) Système matériel continu :

Dans le cas d'un système matériel continu *(S)* : linéaire, surfacique où volumique nous avons :

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système matériel continu, est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$;

- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel continu *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$

3. Torseur cinétique

Soit un solide *(S)* de masse *m* et de centre d'inertie *G*, en mouvement par rapport à un repère fixe *R*. Soit *M* un point de ce solide et deux points A et B quelconque de l'espace mais connus dans le repère *R*.

Par définition nous avons les moments cinétiques en A et B qui sont donnés par :

$$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm - \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{V}(M)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}$$

cette relation est appelée loi de variation du moment cinétique

On constate que le moment cinétique obéit à la loi des transports des moments. Nous pouvons alors construire un torseur cinétique dont les éléments de réduction sont : la résultante cinétique et le moment cinétique.

$$[C]_A = \begin{cases} \vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm \\ \vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \end{cases}$$

$\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$: résultante cinétique ou quantité de mouvement du système *(S)*

$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$: Moment cinétique au point A du système *(S)* dans le repère *R*.

3.1. Expression de la résultante cinétique d'un système matériel

Soit un solide *(S)* de masse *m* et de centre d'inertie *G*, en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Quel que soit $M \in (S)$ nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = \vec{0}$

Les points G et M sont Mobiles dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ et leurs vitesses sont liées par la relation :

$$\frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} - \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \vec{V}(M) - \vec{V}(G)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps sous le signe intégrale, on obtient :

$$\int_S \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt}\,dm = \int_S \left(\vec{V}(M) - \vec{V}(G)\right)dm = \vec{0}$$

$$\int_S \vec{V}(M)dm = \vec{V}(G)\int_S dm = m\vec{V}(G) \quad \text{ce qui donne : } \vec{P} = m\vec{V}(G)$$

La résultante du torseur cinétique est la quantité de mouvement du centre de la masse affectée de la masse totale du système : $\vec{P} = m\vec{V}(G)$

3.2. Propriétés du moment cinétique

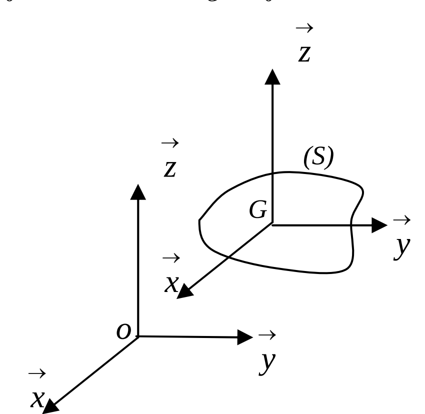
3.2.1. Théorème de Koënig

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 et
- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G .



Soit M un point du système matériel :

Sa vitesse dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M)$

Son moment cinétique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(M) dm$

Son moment cinétique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M) dm$

Nous avons alors :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M) \right) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(G) dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M) dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M) dm = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

Le moment cinétique en G centre d'inertie du système est le même qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1.

En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport :

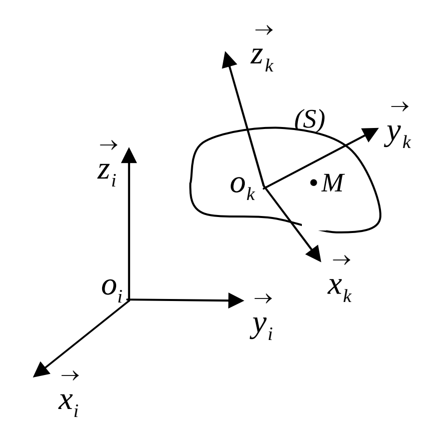
$$\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment cinétique.

3.3. Moment cinétique d'un solide (S) indéformable, lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère fixe R_i .

Soit M un point du solide, sa vitesse est donnée par la cinématique du solide, elle a pour expression : $\vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}$

Le moment cinétique au point O_k est donné par : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(M)\,dm$



En remplaçant l'expression de la vitesse dans celle du moment cinétique, nous obtenons :

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)\,dm + \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$$

avec : $\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)\,dm$ et $\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$

Expression de $\vec{\sigma}_1$:

$$\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)\,dm = \int_S \left(\overrightarrow{O_k G} + \overrightarrow{GM} \right) \wedge \vec{V}^i(O_k)\,dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k)\,dm + \int_S \overrightarrow{GM}\,dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k) \int_S dm + \int_S \overrightarrow{GM}\,dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

Comme G est le centre d'inertie du solide, nous avons alors : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

d'où : $\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge m\vec{V}^i(O_k)$

Expression de $\vec{\sigma}_2$:

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

Afin de développer cette expression, nous utilisons les coordonnées du point M dans le repère R_k et les composantes du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$ dans le repère R_k.

$$\overrightarrow{O_k M} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} \quad ; \quad \vec{\Omega}_k^i = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \wedge \\ \Omega_z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} z\Omega_y - y\Omega_z \\ x\Omega_z - z\Omega_x \\ y\Omega_x - x\Omega_y \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} y(y\Omega_x - x\Omega_y) - z(x\Omega_z - z\Omega_x) \\ z(z\Omega_y - y\Omega_z) - x(y\Omega_x - x\Omega_y) \\ x(x\Omega_z - z\Omega_x) - y(z\Omega_y - y\Omega_z) \end{cases}} = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x(y^2 + z^2) - \Omega_y xy - \Omega_z xz \\ -\Omega_x xy + \Omega_y(x^2 + z^2) - \Omega_z yz \\ -\Omega_x xz - \Omega_y yz + \Omega_z(x^2 + z^2) \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \int_S (y^2 + z^2) dm - \Omega_y \int_S xydm - \Omega_z \int_S xzdm \\ -\Omega_x \int_S xydm + \Omega_y \int_S (x^2 + z^2) dm - \Omega_z \int_S yzdm \\ -\Omega_x \int_S xzdm - \Omega_y \int_S yzdm + \Omega_z \int_S (x^2 + z^2) dm \end{cases}}$$

cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\sigma}_2 = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i$$

on aboutit à l'expression finale : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$ qui s'écrira :

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \overrightarrow{O_kG} \wedge m\vec{V}^i(O_k) + [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i$$

Cas particuliers :

- Si le repère R_k est fixe par rapport à R_i alors $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{\sigma}^i(O_k) = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i$
- Si le point O_k est confondu avec le centre G alors $\overrightarrow{O_kG} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{\sigma}^i(G) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i$

3.4. Théorème de Koënig pour un système matériel *(S)*

Sous la forme généralisée nous avons :

$$\vec{\sigma}^i(M) = \vec{\sigma}^k(G) + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G) \quad \text{avec} \quad \vec{\sigma}^i(G) = \vec{\sigma}^k(G)$$

Nous pouvons ainsi écrire la relation sous la forme :

$$\vec{\sigma}^i(M) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G)$$

I_G : est le moment d'inertie du système en son centre d'inertie.

4. Torseur dynamique

4.1. Définition

Soit M un point du système matériel *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe *R*.

L'accélération du point *M* est donnée par : $\vec{\gamma}(M) = \dfrac{d\vec{V}(M)}{dt}$

- On appelle résultante dynamique ou (quantité d'accélération) du point *M* :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{ou} \quad \vec{D} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i)$$

- On appelle moment dynamique, le moment de la résultante dynamique (moment de la quantité d'accélération) par rapport à un point A du repère R :

$$\vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{où} \quad \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i)$$

On construit le torseur dynamique avec ces deux grandeurs comme éléments de réduction de ce torseur. Le torseur dynamique en un point A du repère R s'exprime sous la forme :

$$[D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \\ \vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \end{cases} \quad \text{où} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i) \\ \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i) \end{cases}$$

Le système étudié n'est pas nécessairement indéformable comme pour le torseur cinétique. Le moment dynamique obéit aussi de la même manière à la formule de transport des moments. Les moments dynamiques en deux points quelconques A et B sont liés par :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}$$

4.2. Calcul de la résultante dynamique

Soit G le centre d'inertie du système dans le repère R , la résultante dynamique s'écrit :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm = \int_S \frac{d\vec{V}(M)}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_S \vec{V}(M)dm = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V}(G))}{dt} = m\vec{\gamma}(G)$$

Si la masse du système est constante, la résultante dynamique est égale au produit de la masse par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\vec{D} = m\vec{\gamma}(G)$$

La résultante du torseur dynamique est égale à la quantité d'accélération du centre d'inertie du système affectée de la masse totale.

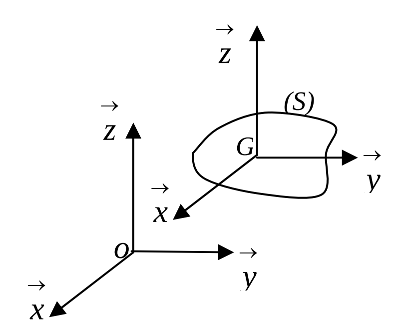
4.3. Théorème de Koënig relatif au moment dynamique

Soit $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G.



Soit M un point du système matériel:

Son accélération dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^0(G) + \vec{\gamma}^G(M)$

Son moment dynamique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm$

Son moment dynamique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$

Alors : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\gamma}^0(G) + \vec{\gamma}^G(M)\right)dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^0(G)dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{\gamma}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

Le moment dynamique en G centre d'inertie du système est le même, qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1. En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport : $\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment dynamique.

4.4. Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

Soit A un point quelconque du repère R_0 pas nécessairement un point du système matériel et un point M du système matériel. Nous avons le moment cinétique au point A qui est donné par : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)dm$

Dérivons cette expression :

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)\right)dm = \int_S \frac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d^0\vec{V}^0(M)}{dt}dm$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A$$

or nous avons : $\frac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)\right) \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = -\vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) + \vec{\delta}_A$$

on obtient ainsi la relation finale entre le moment cinétique et le moment dynamique

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Cette relation ne doit en aucun cas être confondue avec la formule de transport.

4.5. Cas particuliers

Dans certains cas particuliers la dérivée du torseur cinétique est égale au torseur dynamique :

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} \quad \textbf{Si :} \begin{cases} 1)\ A \text{ est fixe dans } R_0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) = \vec{0} \\ 2)\ A \text{ est confondu avec } G \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \\ 3)\ \vec{V}^0(A) // \vec{V}^0(G) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans ces trois cas particuliers seulement, nous pouvons écrire :

$$\vec{D}_A = \frac{d\vec{C}_A}{dt} \quad \text{avec} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad [C]_A = \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{\sigma}_A \end{cases}$$

5. Energie cinétique

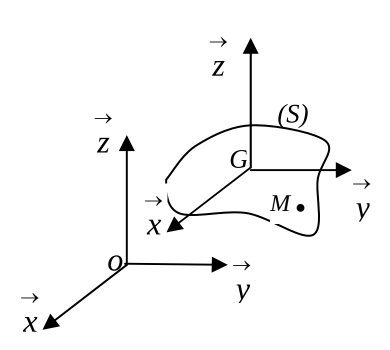
5.1. Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel continu *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 est définie par la quantité scalaire exprimée par la relation : $E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm$

5.2. Théorème de Koënig relatif à l'énergie cinétique

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G/R_0) = \vec{0}$



Nous allons chercher une relation entre :

- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_G

Soit M un point du système matériel. La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M)$$

en remplaçant cette expression dans celle de l'énergie cinétique nous aurons :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)+\vec{V}^G(M)\right)^2 dm = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm + \int_S \vec{V}^0(G)\bullet\vec{V}^G(M)dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

or nous avons : $\vec{V}^G(M) = \frac{d^G\overrightarrow{GM}}{dt}$ dans le repère R_G

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm + \vec{V}^0(G)\bullet\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{GM}dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

nous avons aussi par définition du centre d'inertie que : $\int_S \overrightarrow{GM}dm = \vec{0}$

L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

qui s'écrit aussi sous la forme réduite : $E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm \ + \ E_C^G$

L'énergie cinétique du système *(S)* en mouvement quelconque par rapport au repère R_0 est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie *G* augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

5.3 Solide indéformable en mouvement quelconque

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à un solide indéformable et de centre de d'inertie *G*.

Le solide est en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$. La vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 est : $\vec{\Omega}_1^0$

Soit M un point quelconque du solide, nous avons par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide *(S)* est donnée par :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)^2 dm$$

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \vec{V}^0(O_1) \bullet \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right) dm + \int_S \frac{1}{2}\vec{V}^0(M) \bullet \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \int_S \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

L'expression du moment cinétique déjà développée auparavant est donnée par :

$$\vec{\sigma}^0(O_1) = \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

Nous avons alors l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique du solide:

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(O_1)$$

Si le centre O_1 du repère R_1 est confondu avec le centre d'inertie G du solide : $O_1 \equiv G$ alors :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(G)$$

Le moment cinétique en G s'écrit : $\vec{\sigma}^0(G) = I_G\,\vec{\Omega}_1^0$ on aboutit à la relation finale :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^{0^T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$$

$\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2$: est l'énergie cinétique de translation du solide

$\vec{\Omega}_1^{0^T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$: est l'énergie cinétique de rotation du solide autour de son centre d'inertie G.

L'énergie cinétique totale d'un solide en mouvement quelconque dans l'espace est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre d'inertie affectée de la masse du solide et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre d'inertie.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale peut s'exprimer en fonction des torseurs cinématiques et cinétique au point O_1 en la mettant sous la forme :

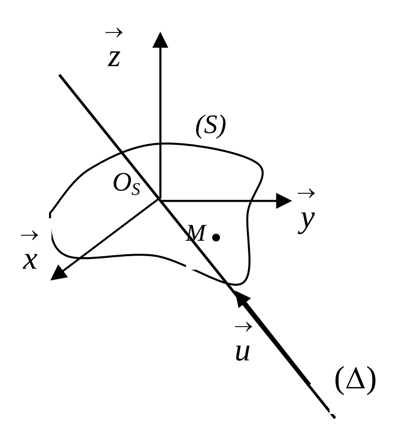
$$E_C^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(M) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m\vec{V}^0(G) \\ \vec{\sigma}^0(O_1) \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique totale d'un solide est égale à la moitié du produit scalaire du torseur cinématique par le torseur cinétique au point O_1 exprimé dans le repère R_0.

$$E_C^0 = \frac{1}{2}[V]_{O_1} \bullet [C]_{O_1}$$

5.4. Solide indéformable en mouvement de rotation pur

Dans le cas où le solide est en mouvement de rotation pur autour d'un axe Δ passant par un point O_S du solide et de vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que : $\Delta(O_S, \vec{u})$ avec $\vec{\Omega}_S^0 = \Omega\vec{u}$ .Le moment d'inertie par rapport à cet axe est donné par : $I_\Delta = \vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u}$



L'énergie cinétique de rotation pure est donnée par :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_S^{0\,T} . I_{O_S} . \vec{\Omega}_S^0 = \frac{1}{2}\Omega\vec{u}^T . I_{O_S} . \Omega\vec{u} = \frac{1}{2}\Omega^2\,\vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u} = \frac{1}{2}\Omega^2 . I_\Delta$$

5.5. Energie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides *(S)* constitué des solides *(S_1 , S_2, S_3, ……S_n)* dans un repère R_0 est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque solide exprimée dans le même repère.

$$E_C^0(S) = \sum_i E_C^0(S_i)$$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01:

Une barre homogène de longueur ***OM = L*** , de centre ***G*** est en mouvement dans un repère orthonormé fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. On défini deux repères R_1 et R_2 tel que :

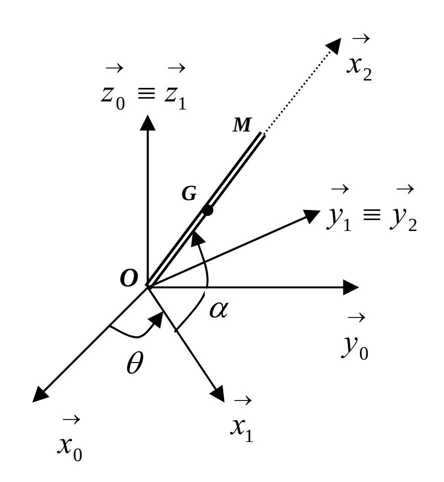
$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ repère mobile tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $\theta = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$;

$R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ lié à la barre tel que : $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$ et $\alpha = (\vec{x}_1,\vec{x}_2) = (\vec{z}_1,\vec{z}_2)$;

On prendra R_1 comme repère de projection et comme repère relatif.

Déterminer :

1. La vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_2^0$ du repère R_2 par rapport à R_0 ;
2. La vitesse $\vec{V}^0(M)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(M)$ par dérivation ;
3. La vitesse $\vec{V}^0(G)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ par composition de mouvement ;
4. Le moment cinétique $\vec{\sigma}^0(O)$ au point ***O*** exprimé dans R_1 ;
5. Le moment dynamique $\vec{\delta}^0(O)$ au point ***O*** exprimé dans R_1 ;
6. L'énergie cinétique de la barre.



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_2^0$ du repère R_2 par rapport à R_0 ;

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases}} \quad , \quad \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 \quad \text{car : } \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_1 = -\vec{y}_1$$

2. Vitesse $\vec{V}^0(M)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(M)$ par dérivation ;

2.1. Vitesse

$$\vec{V}^0(M) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^1\,\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OM}$$

Nous avons : $\overrightarrow{OM} = \underset{R_1}{\begin{cases} 2L\cos\alpha \\ 0 \\ 2L\sin\alpha \end{cases}} \Rightarrow \dfrac{d^1\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \underset{R_1}{\begin{cases} -2L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ 2L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}}$

$$\vec{V}^0(M) = \underset{R_1}{\begin{cases} -2L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ 2L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 2L\cos\alpha \\ 0 \\ 2L\sin\alpha \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -2L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 2L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 2L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}}$$

2.2. Accélération

$$\vec{\gamma}^0(M) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(M)}{dt} = \frac{d^1\,\vec{V}^0(M)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(M)$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \underset{R_1}{\begin{cases} -2L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ 2L(\ddot{\theta}\cos\alpha - \dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha) \\ 2L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} -2L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 2L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 2L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \underset{R_1}{\begin{cases} -2L\left(\ddot{\alpha}\sin\alpha + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2)\cos\alpha\right) \\ 2L(\ddot{\theta}\cos\alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha) \\ 2L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\ ) \end{cases}}$$

3. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ et accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ par composition de mouvement ;

3.1. Vitesse

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^1(G) + \vec{V}_1^0(G) \text{ , avec : } \overrightarrow{OG} = \begin{cases} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{cases}_{R_1} \Rightarrow \vec{V}^1(G) = \frac{d^1\overrightarrow{OG}}{dt} = \begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}_1^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}_{R_1}$$

3.2. Accélération

$$\vec{\gamma}^0(G) = \vec{\gamma}^1(G) + \vec{\gamma}_1^0(G) + \vec{\gamma}_c(G)$$

$$\vec{\gamma}^1(G) = \frac{d^1\vec{V}^1(G)}{dt} = \begin{cases} -L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}_1^0(G) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OG} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG}\right) \quad \text{avec : } \vec{\gamma}^0(O) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d^0\vec{\Omega}_1^0}{dt} = \frac{d^1\vec{\Omega}_1^0}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_1^0(G) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -L\dot{\theta}^2\cos\alpha \\ L\ddot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}_c(G) = 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(G)\right) = 2\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

La somme de tous les termes donne :

$$\vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} -L(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) \\ 0 \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} -L\dot{\theta}^2\cos\alpha \\ L\ddot{\theta}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ -2L\dot{\alpha}\dot{\theta}\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{cases} -L\left(\ddot{\alpha}\sin\alpha + (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2)\cos\alpha\right) \\ L(\ddot{\theta}\cos\alpha - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha) \\ L(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\ ) \end{cases}_{R_1}$$

4. Moment cinétique $\vec{\sigma}^0(O)$ au point O exprimé dans R_1 ;

Le moment cinétique au point O dans le repère R_0 est donné par :

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_G\,\vec{\Omega}_2^0 + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^0(G) \quad \text{avec : } I_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_2^0 = \begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{cases} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} L\cos\alpha \\ 0 \\ L\sin\alpha \end{cases}_{R_1} \wedge m \begin{cases} -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ L\dot{\theta}\cos\alpha \\ L\dot{\alpha}\cos\alpha \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -mL^2\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta}\cos^2\alpha \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -\frac{4mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta}(\frac{1}{3} + \cos^2\alpha\ ) \end{cases}_{R_1}$$

5. Moment dynamique $\vec{\delta}^0(O)$ au point *O* exprimé dans R_1 ;

Il est déterminé à partir du moment cinétique par la relation :

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} \wedge \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \begin{cases} -mL^2\left(\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha - \dot{\theta}\dot{\alpha}\sin^2\alpha + \dot{\theta}\dot{\alpha}\cos^2\alpha\right) \\ -\dfrac{4mL^2}{3}\ddot{\alpha} \\ mL^2\left(\ddot{\theta}(\dfrac{1}{3}+\cos^2\alpha) - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha\ \cos\alpha\right) \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases} \wedge \begin{cases} -mL^2\dot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha \\ -\dfrac{4mL^2}{3}\dot{\alpha} \\ mL^2\dot{\theta}(\dfrac{1}{3}+\cos^2\alpha) \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} -\dfrac{4mL^2}{3}\dot{\alpha}\dot{\theta} \\ -mL^2\dot{\theta}^2\cos\alpha\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

on déduit :

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{cases} -mL^2\left(\ddot{\theta}\cos\alpha\sin\alpha - \dot{\theta}\dot{\alpha}\sin^2\alpha + \dot{\theta}\dot{\alpha}\cos^2\alpha - \dfrac{4}{3}\dot{\alpha}\dot{\theta}\right) \\ -mL^2\left(\dfrac{4}{3}\ddot{\alpha} + \dot{\theta}^2\cos\alpha\sin\alpha\right) \\ mL^2\left(\ddot{\theta}(\dfrac{1}{3}+\cos^2\alpha) - 2\dot{\theta}\dot{\alpha}\sin\alpha\ \cos\alpha\right) \end{cases}_{R_1}$$

6. Energie cinétique de la barre.

L'énergie cinétique totale a pour expression :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_2^0 . I_G . \vec{\Omega}_2^0$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + \dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \dot{\alpha}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(0, -\dot{\alpha}, \dot{\theta}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\alpha\right) + \frac{mL^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{2}{3}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}^2\left(\frac{1}{3} + \cos^2\alpha\right)$$

Exercice 02:

On considère le système matériel suivant (Σ) compsé des solides suivants:

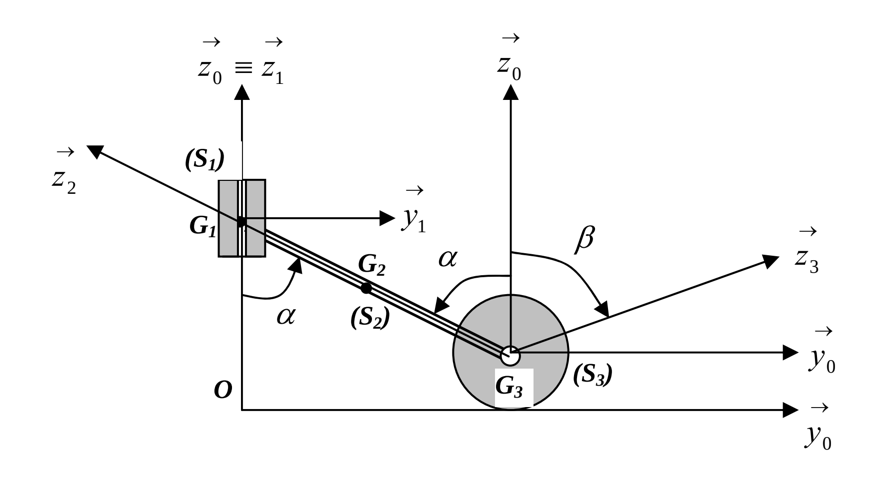
***(S₁)* :** est un coulisseau de masse m_1, de centre de masse G_1 lié au repère R_1 en mouvement de translation rectiligne par rappport à un repère fixe $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ suivant l'axe $\vec{z}_0$.

(S2) : est une barre uniforme de longueur ***2b***, de masse m_2 , de centre de masse G_2 lié à R_2

(S_3) : est un disque homogène de rayon ***R*** , de masse m_3 ,de centre de masse G_3 lié à R_3

On donne les tenseurs d'inertie **:** $I_{G2}(S_2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2}$; $I_{G3}(S_3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$

1. Déterminer les vitesses et les accélérations des points G_i avec $i = 1,2,3$
2. Calculer les moments cinétiques $\vec{\sigma}_{Gi}(S_i / R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i = 1,2,3$;
3. Calculer les moments dynamiques $\vec{\delta}_{Gi}(S_i / R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i = 1,2,3$;
4. En déduire le moment dynamique du système au point G_1 : $\vec{\delta}_{G1}(\Sigma / R_0)$ exprimé dans R_0 ;
5. Calculer l'énergie cinétique du système $E_c(\Sigma / R_0)$ par rapport à R_0.



Solution :

$R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe ; et aussi repère de projection

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: $\vec{z}_1 \equiv \vec{z}_0$ et $\vec{\Omega}_1^0 \equiv \vec{0}$

$R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: $\vec{x}_2 \equiv \vec{x}_0$ et $\vec{\Omega}_2^0 \equiv \dot{\alpha}\,\vec{x}_0$

$R_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$: $\vec{x}_3 \equiv -\vec{x}_0$ et $\vec{\Omega}_3^0 \equiv -\dot{\beta}\,\vec{x}_0$

$$\overrightarrow{OI} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ b\cos\alpha \\ 0 \end{cases}} ; \quad \overrightarrow{OG_1} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ R + 2b\cos\alpha \end{cases}} ; \quad \overrightarrow{OG_2} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ b\sin\alpha \\ R + b\cos\alpha \end{cases}} ; \quad \overrightarrow{OG_3} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 2b\sin\alpha \\ R \end{cases}}$$

1. Vitesses et accélérations absolues des points G_i avec *i = 1,2,3*

1.1. Vitesses par dérivation:

$$\vec{V}^0(G_1) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OG_1}}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases}} ; \quad \vec{V}^0(G_2) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OG_2}}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{cases}}$$

$$\vec{V}^0(G_3) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OG_3}}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 2b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{cases}}$$

1.1. Accélération par dérivation:

$$\vec{\gamma}^0(G_1) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(G_1)}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -2b\ddot{\alpha}\sin\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_2) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(G_2)}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ b\ddot{\alpha}\cos\alpha - b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ -b\ddot{\alpha}\sin\alpha - b\dot{\alpha}^2\cos\alpha \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_3) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(G_3)}{dt} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 2b\ddot{\alpha}\cos\alpha - 2b\dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ \end{cases}}$$

2. Moments cinétiques $\vec{\sigma}_{Gi}(S_i/R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i=1,2,3$;

Les moments cinétiques des trois solides en leurs centres d'inertie sont donnés par :

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_1/R_0)=\overrightarrow{G_1G_1}\wedge m_1\vec{V}^0(G_1)+I_1\vec{\Omega}_1^0=\vec{0}$$

$$\vec{\sigma}_{G2}(S_2/R_0)=\overrightarrow{G_2G_2}\wedge m_2\vec{V}^0(G_2)+I_2\vec{\Omega}_2^0=\begin{bmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&C_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_2\dot{\alpha}\\0\\0\end{pmatrix}=A_2\dot{\alpha}\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G3}(S_3/R_0)=\overrightarrow{G_3G_3}\wedge m_3\vec{V}^0(G_3)+I_3\vec{\Omega}_3^0=\begin{bmatrix}A_3&0&0\\0&B_3&0\\0&0&C_3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-\dot{\beta}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A_3\dot{\beta}\\0\\0\end{pmatrix}=-A_3\dot{\beta}\vec{x}_0$$

3. Moments dynamiques $\vec{\delta}_{Gi}(S_i/R_0)$ des (S_i) en G_i avec $i=1,2,3$;

Les moments dynamiques se déduisent par la dérivée des moments cinétiques :

$$\vec{\delta}_{G1}(S_1/R_0)=\frac{d^1\vec{\sigma}_{G1}(S_1/R_0)}{dt}=\vec{0}$$

$$\vec{\delta}_{G2}(S_2/R_0)=\frac{d^2\vec{\sigma}_{G2}(S_2/R_0)}{dt}=A_2\ddot{\alpha}\vec{x}_0$$

$$\vec{\delta}_{G3}(S_3/R_0)=\frac{d^3\vec{\sigma}_{G3}(S_3/R_0)}{dt}=-A_3\ddot{\beta}\vec{x}_0$$

4. Moment dynamique du système au point G_1 : $\vec{\delta}_{G1}(\sum/R_0)$ exprimé dans R_0;

Le moment dynamique du système au point G_1 est égal à la somme des moments dynamiques des trois solides au même point.

$$\vec{\delta}_{G1}(\sum/R_0)=\vec{\delta}_{G1}(S_1/R_0)+\vec{\delta}_{G1}(S_2/R_0)+\vec{\delta}_{G1}(S_3/R_0)$$

$$\vec{\delta}_{G1}(\sum/R_0)=\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_1/R_0)}{dt}+\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_2/R_0)}{dt}+\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_3/R_0)}{dt}$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_1/R_0)}{dt}=\vec{0}$$

Calculons d'abord les moments cinétiques des solides (S_2) et (S_3) en G_1 en utilisant la formule de transport :

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_{G2}(S_2/R_0) + \overrightarrow{G_1G_2} \wedge m_2 \vec{V}^0(G_2)$$

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_2/R_0) = A_2\dot{\alpha}\vec{x}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ b\sin\alpha \\ -b\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ -b\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix} = \left(A_2\dot{\alpha} + m_2 b^2 \dot{\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \right)\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_2/R_0) = \left(A_2\dot{\alpha} + m_2 b^2 \dot{\alpha}\cos 2\alpha \right)\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_3/R_0) = \vec{\sigma}_{G3}(S_3/R_0) + \overrightarrow{G_1G_3} \wedge m_3 \vec{V}^0(G_3)$$

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_3/R_0) = -A_3\dot{\beta}\vec{x}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\sin\alpha \\ -2b\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge m_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\dot{\alpha}\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-A_3\dot{\beta} + 4m_3 b^2 \dot{\alpha}\cos^2\alpha \right)\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{G1}(S_3/R_0) = \left(-A_3\dot{\beta} + 4m_3 b^2 \dot{\alpha}\cos^2\alpha \right)\vec{x}_0$$

Les moments dynamiques se déduisent facilement par dérivation des deux expressions:

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_2/R_0)}{dt} = \left(A_2\ddot{\alpha} + m_2 b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha) \right)\vec{x}_0$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_{G1}(S_3/R_0)}{dt} = \left(-A_3\ddot{\beta} + 4m_3 b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - 8m_3 b^2\dot{\alpha}^2\sin\alpha\cos\alpha \right)\vec{x}_0$$

$$= \left(-A_3\ddot{\beta} + 4m_3 b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - 4m_3 b^2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha \right)\vec{x}_0$$

Le moment dynamique du système est la somme des deux expressions :

$$\vec{\delta}_{G1}(\textstyle\sum/R_0) = \left(A_2\ddot{\alpha} + m_2 b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha) \right)\vec{x}_0 + \left(-A_3\ddot{\beta} + 4m_3 b^2\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - 4m_3 b^2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha \right)\vec{x}_0$$

$$\vec{\delta}_{G1}(\textstyle\sum/R_0) = \left(A_2\ddot{\alpha} - A_3\ddot{\beta} + m_2 b^2(\ddot{\alpha}\cos 2\alpha - 2\dot{\alpha}^2\sin 2\alpha) + 4m_3 b^2(\ddot{\alpha}\cos^2\alpha - \dot{\alpha}^2\sin 2\alpha) \right)\vec{x}_0$$

5. Energie cinétique du système $E_c(\Sigma/R_0)$ par rapport à R_0.

$$E_C(\sum/R_0)=E_C(S_1/R_0)+E_C(S_2/R_0)+E_C(S_3/R_0)$$

$$E_C(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m_1\left(\vec{V}^0(G_1)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0\,T}.I_{G1}.\vec{\Omega}_1^0=\frac{1}{2}m_1 4b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha$$

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}m_2\left(\vec{V}^0(G_2)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0\,T}.I_{G2}.\vec{\Omega}_2^0=\frac{1}{2}m_2 b^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}A_2\dot{\alpha}^2$$

$$E_C(S_3/R_0)=\frac{1}{2}m_3\left(\vec{V}^0(G_3)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^{0\,T}.I_{G3}.\vec{\Omega}_3^0=\frac{1}{2}m_3 4b^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha+\frac{1}{2}A_3\dot{\beta}^2$$

$$E_C(\sum/R_0)=\frac{1}{2}\left(b^2(4m_1\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha+m_2\dot{\alpha}^2+4m_3\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha)+A_2\dot{\alpha}^2+A_3\dot{\beta}^2\right)$$

Exercice : 03

Le système mécanique représenté ci-dessous est composé de deux solides.

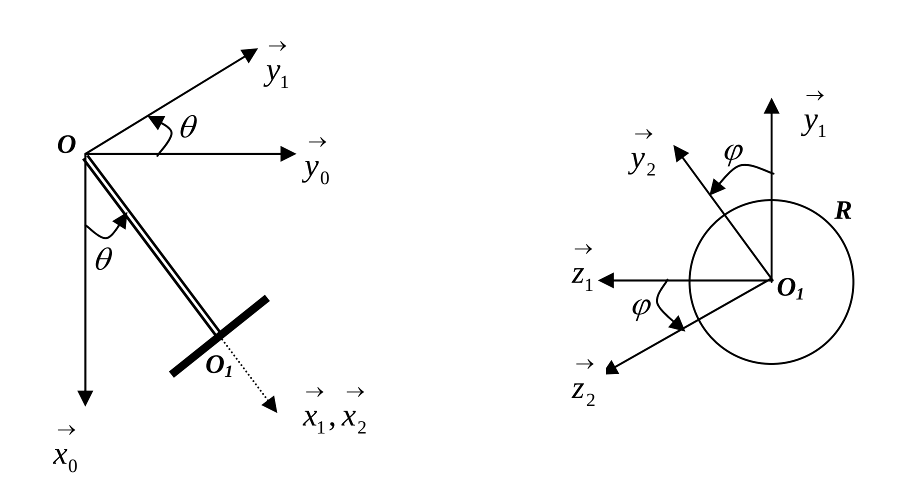
(S₁) : une barre de longueur $OO_1 = L$, de ***masse négligeable***, maintenue à ses deux extrémités par des liaisons : sphériques ***O*** et cylindrique en O_1 (d'axe $\vec{x}_1$). Le disque ***(S₂)*** a un rayon ***R*** et une masse ***m.*** La barre, lié au repère $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, est en rotation dans le plan vertical à une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par rapport au repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$. Le disque lié au repère $R_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, tourne autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ à une vitesse de rotation $\dot{\varphi}$. Le tenseur d'inertie du disque ***(S₂)*** au point O_1 dans R_1 est donné par :

$$I_{O1}(S_2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1}$$

On prendra R_1 comme repère de projection.

Déterminer :

1. La vitesse de rotation instantanée $\vec{\Omega}_2^0$ du disque par rapport au repère fixe ;
2. La vitesse et l'accélération du point O_1 par la cinématique du solide ;
3. Le moment cinétique et le moment dynamique aux points O_1 et ***O*** par rapport à R_0 ;
4. L'énergie cinétique du système
5. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au système
6. Appliquer le théorème du moment dynamique au système au point ***O***.



Solution :

1. **Vecteur rotation instantanée du disque par rapport à R_0 et exprimé dans R_1**

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \underset{R_1}{\begin{cases} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}}$$

2. **Vitesse et accélération absolues du point O_1 dans R_1 par la cinématique du solide**

$$\vec{V}^0(O_1) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OO_1} \; ; \quad \text{comme} \quad \overrightarrow{OO_1} = \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_1^0 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}}$$

alors : $$\vec{V}^0(O_1) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OO_1} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(O_1) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \overrightarrow{OO_1} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OO_1} \qquad \text{on a :} \quad \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{dt} = \frac{d^1 \vec{\Omega}_1^0}{dt}$$

$$\vec{\gamma}^0(O_1) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

3. **Moment cinétique et moment dynamique aux points O_1 et O par rapport à R_0**

3.1. Moment cinétique et moment dynamique en O_1

$$\vec{\sigma}^0(O_1) = I_{O1}.\vec{\Omega}_2^0 = \underset{R_1}{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}} \underset{R_1}{\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}} = \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ C\dot{\theta} \end{pmatrix}}$$

$$\vec{\delta}^0(O_1) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(O_1)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O_1)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O_1) = \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ 0 \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}} + \underset{R_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}} \wedge \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ C\dot{\theta} \end{pmatrix}} = \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}^2 \\ C\ddot{\theta} \end{pmatrix}}$$

3.2. Moment cinétique et moment dynamique en O

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_{O1}.\vec{\Omega}_2^0 + \overrightarrow{OO_1} \wedge m\vec{V}^0(O_1) \quad \text{or} \quad \vec{V}^0(O_1) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \wedge m \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{array} \right._{R_1} = \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ (C + mL^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^1 \vec{\sigma}^0(O)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ 0 \\ (C + mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} \wedge \begin{pmatrix} A\dot{\varphi} \\ 0 \\ (C + mL^2)\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C + mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

4. L'énergie cinétique du système

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(O_1)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0T}.I_{O1}.\vec{\Omega}_2^0 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi},\ 0,\ \dot{\theta}\right) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$$

5. Théorème de la résultante dynamique au système

La somme des forces appliquées au système est égale à la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}^0(O_1) \ ; \qquad \text{avec :} \quad \vec{\gamma}^0(O_1) = \left\{ \begin{array}{c} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$$

$$\vec{R}_O + m\vec{g} = m\vec{\gamma}^0(O_1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R_{Ox} + mg\cos\theta = -mL\dot{\theta}^2 \\ R_{Oy} + R_{O1y} - mg\sin\theta = L\ddot{\theta} \\ R_{Oz} + R_{O1z} = 0 \end{cases}$$

6. Théorème du moment dynamique du système au point O

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique au même point O.

$$\sum \vec{M}_0(\vec{F}_{ext}) = \vec{\delta}^0(O) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OO_1} \wedge \vec{R}_{O1} + \overrightarrow{OO_1} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}^0(O)$$

$$\underset{R_1}{\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \wedge \underset{R_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ R_{O1y} \\ R_{O1z} \end{pmatrix}} + \underset{R_1}{\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \wedge \underset{R_1}{\begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}}$$

$$\underset{R_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -LR_{O1z} \\ LR_{O1y} - mgL\sin\theta \end{pmatrix}} = \underset{R_1}{\begin{pmatrix} A\ddot{\varphi} \\ A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A\ddot{\varphi} = 0 \\ -LR_{O1z} = A\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ -mgL\sin\theta + LR_{O1y} = (C+mL^2)\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{\varphi} = Cte$$

$$R_{O1z} = -\frac{A}{L}\dot{\varphi}\dot{\theta}$$

$$R_{O1y} = \frac{(C+mL^2)}{L}\ddot{\theta} + mg\sin\theta$$

Exercice : 04

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe lié au bati d'une éolienne constitué d'une girouette et d'une hélice. La girouette ***(S₁)*** lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, a une liaison pivot avec le bati fixe de manière à tourner dans le plan horizontal autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)$, avec $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$, $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_1$ où ***a*** : est une constante positive.

L'hélice **(S₂)** est lié au repère $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ et ayant un rayon $\overrightarrow{GP} = b\,\vec{z}_2$, tourne autour de l'axe $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ tel que : $\beta = (\vec{z}_1,\vec{z}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$.

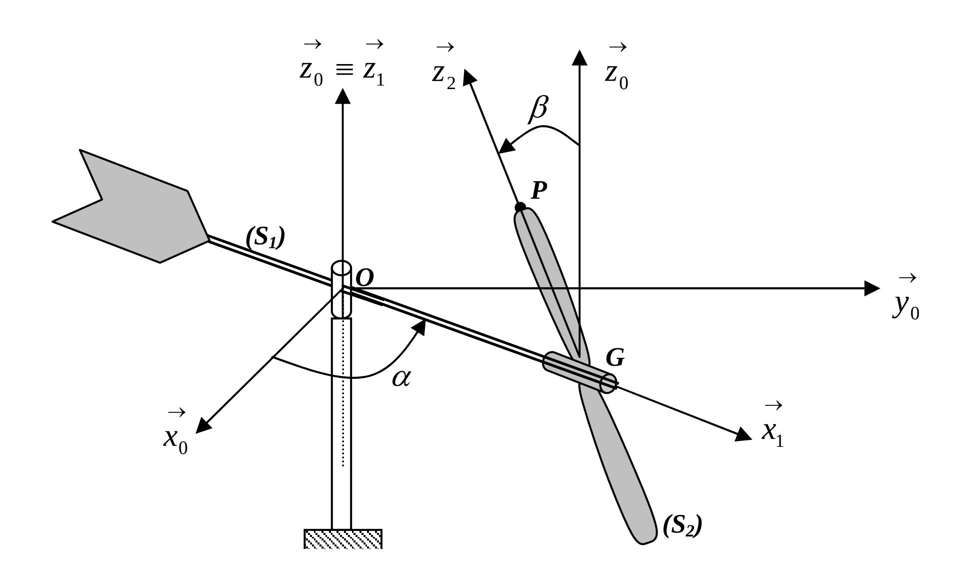
La girouette a un moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$ qui est égal à : I

Le tenseur d'inertie de hélice de masse M et de centre d'inertie G dans le repère R_2 est donné par : $I_G(S_2)_{R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$

Un balourd représenté par une masse ponctuelle ***m*** située à l'extrémité de l'hélice au point ***P*** sur l'axe $(G,\vec{z}_2)$.

Déterminer :

1. Le moment cinétique de la girouette dans son mouvement par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$;
2. Le moment cinétique $\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)$ de l'hélice au point O exprimé dans le repère R_2 ;
3. Le moment dynamique de l'hélice par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$: $\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0)$, exprimé dans le repère R_2 ;
4. Le moment cinétique du balourd par rapport au repère R_0 et exprimé dans le repère R_2 ;
5. L'énergie cinétique totale du système par rapport au repère R_0.



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe lié au bâti ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$; $\alpha = (\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

$R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ tel que : $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$; $\beta = (\vec{z}_1,\vec{z}_2) = (\vec{y}_1,\vec{y}_2)$ et $\vec{\Omega}_2^0 = \dot{\beta}\,\vec{x}_1 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2$

Nous avons aussi : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_1 = a\,\vec{x}_2$; $\overrightarrow{GP} = b\,\vec{z}_2$

$$I_{zz}(S_1)_{R_0} = I \quad ; \quad I_G(S_2)_{R_2} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$$

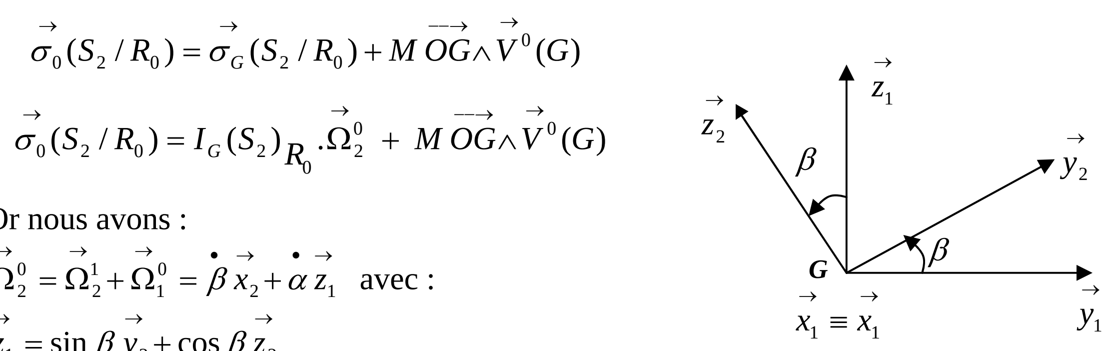
1. Moment cinétique de la girouette par rapport à l'axe $(O,\vec{z}_0)$: $\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}_0(S_1/R_0)$

$$\vec{\sigma}_0(S_1/R_0) = I_0(S_1)_{R_0}.\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{R_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = I_{zz}\,\dot{\alpha}\;\vec{z}_0 = I\,\dot{\alpha}\;\vec{z}_0$$

$$\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}_0(S_1/R_0) = \left(I\,\dot{\alpha}\;\vec{z}_0 \right) \bullet \vec{z}_0 = I\,\dot{\alpha}$$

2. Moment cinétique $\vec{\sigma}^0(S_2)_{R_2}$ de l'hélice au point *O* exprimé dans le repère R_2 ;

Le moment cinétique de l'hélice en *O* est donné par la relation :



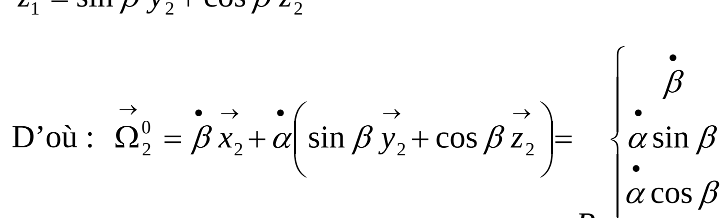
$$\vec{\sigma}_0(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_G(S_2/R_0) + M\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^0(G)$$

$$\vec{\sigma}_0(S_2/R_0) = I_G(S_2)_{R_0}.\vec{\Omega}_2^0 \; + \; M\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^0(G)$$

Or nous avons :

$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$ avec :

$\vec{z}_1 = \sin\beta\,\vec{y}_2 + \cos\beta\,\vec{z}_2$



$$\text{D'où : } \vec{\Omega}_2^0 = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\left(\sin\beta\,\vec{y}_2 + \cos\beta\,\vec{z}_2 \right) = \begin{cases} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0 \overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ a\dot{\alpha}\cos\beta \\ -a\dot{\alpha}\sin\beta \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_0(S_2/R_0) = \underset{R_2}{\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}} . \underset{R_2}{\begin{cases} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{cases}} + M \underset{R_2}{\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ a\dot{\alpha}\cos\beta \\ -a\dot{\alpha}\sin\beta \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_0(S_2/R_0) = A\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + B\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 + Ma^2\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + Ma^2\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$

$$\vec{\sigma}_0(S_2/R_0) = A\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \left(B + Ma^2\right)\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + \left(C + Ma^2\right)\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2$$

3. Moment dynamique de l'hélice par rapport à l'axe $(O, \vec{z}_0)$: $\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2)_{R_2}$ dans R_2

Le moment dynamique est déduit à partir du moment cinétique par :

$$\vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \vec{z}_0 \bullet \frac{d^0\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)}{dt}$$

$$\vec{z}_0 \bullet \frac{d^0\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)}{dt} = \frac{d^0\left(\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\right)}{dt} - \vec{\sigma}^0(S_2/R_0) . \frac{d^0\vec{z}_0}{dt} = \frac{d^0\left(\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\right)}{dt}$$

car : $\dfrac{d^0\vec{z}_0}{dt} = \vec{0}$

ce qui donne : $\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \dfrac{d^0\left(\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\right)}{dt}$

$$\frac{d^0\left(\vec{z}_0 \bullet \vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\right)}{dt} = \frac{d^0}{dt}\left(\vec{z}_0 \bullet \left(A\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \left(B + Ma^2\right)\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + \left(C + Ma^2\right)\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2\right)\right)$$

$$\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \frac{d^0}{dt}\left(A\dot{\beta}(\vec{z}_0 \bullet \vec{x}_2) + \left(B + Ma^2\right)\dot{\alpha}\sin\beta(\vec{z}_0 \bullet \vec{y}_2) + \left(C + Ma^2\right)\dot{\alpha}\cos\beta(\vec{z}_0 \bullet \vec{z}_2)\right)$$

or nous avons : $(\vec{z}_0 \bullet \vec{x}_2) = 0$; $(\vec{z}_0 \bullet \vec{y}_2) = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin\beta$; $(\vec{z}_0 \bullet \vec{z}_2) = \cos\beta$

$$\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \frac{d^0}{dt}\left(\left(B + Ma^2\right)\dot{\alpha}\sin^2\beta + \left(C + Ma^2\right)\dot{\alpha}\cos^2\beta \right)$$

$$\vec{z}_0 \bullet \vec{\delta}^0(S_2/R_0) = \frac{d^0}{dt}\left(\dot{\alpha}\left(B\sin^2\beta + C\cos^2\beta\right) + Ma^2 \right)$$

4. Moment cinétique du balourd par rapport à R_0 et exprimé dans R_2 ;

Le balourd est une masse ponctuelle, son moment cinétique est donné par :

$$\vec{\sigma}^0(P/R_0) = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{V}^0(P) \quad , \quad \text{avec : } \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP} = a\,\vec{x}_2 + b\,\vec{z}_2 = \begin{cases} a \\ 0 \\ b \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{V}^0(P) = \frac{d^0\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{cases} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} a \\ 0 \\ b \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} b\dot{\alpha}\sin\beta \\ a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta} \\ a\dot{\alpha}\sin\beta \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\sigma}^0(P/R_0) = \begin{cases} a \\ 0 \\ b \end{cases}_{R_2} \wedge \; m \begin{cases} b\dot{\alpha}\sin\beta \\ a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta} \\ a\dot{\alpha}\sin\beta \end{cases}_{R_2} = m \begin{cases} -b\left(a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta}\right) \\ b^2\dot{\alpha}\sin\beta - a^2\dot{\alpha}\sin\beta \\ a\left(a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta}\right) \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\sigma}^0(P/R_0) = mb\left(b\dot{\beta} - a\dot{\alpha}\cos\beta\right)\vec{x}_2 + m\left(b^2\dot{\alpha}\sin\beta - a^2\dot{\alpha}\sin\beta\right)\vec{y}_2 + ma\left(a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta}\right)\vec{z}_2$$

$$\vec{\sigma}^0(P/R_0) = mb\left(b\dot{\beta} - a\dot{\alpha}\cos\beta\right)\vec{x}_2 + m\dot{\alpha}\sin\beta\left(b^2 - a^2\right)\vec{y}_2 + ma\left(a\dot{\alpha}\cos\beta - b\dot{\beta}\right)\vec{z}_2$$

5. Energie cinétique totale du système par rapport au repère R_0.

L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque solide par rapport au même repère.

$$E_C\left(\sum/R_0\right) = E_C\left(S_1/R_0\right) + E_C\left(S_2/R_0\right) + E_C\left(S_3/R_0\right)$$

Energie cinétique de la girouette :

$$E_C(S_1/R_0)=\frac{1}{2}I\,\vec{\Omega}_1^0 \;=\; \frac{1}{2}I\,\dot{\alpha}$$

Energie cinétique de l'hélice :

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}[Torseur\ cinétique]\times[Torseur\ cinétmatique]$$

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} M\vec{V}^0(G) \\ \vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\Omega}_2^0 \\ \vec{V}^0(O)\end{bmatrix}=\vec{V}^0(O)\bullet M\vec{V}^0(G)+\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\vec{\Omega}_2^0$$

or nous avons : $\vec{V}^0(O)=\vec{0}$

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)\vec{\Omega}_2^0=\frac{1}{2}\begin{cases} A\dot{\beta} \\ (B+Ma^2)\dot{\alpha}\sin\beta \\ (C+Ma^2)\dot{\alpha}\cos\beta \end{cases}_{R_2} \bullet \begin{cases}\dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta\end{cases}_{R_2}$$

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}\left(A\dot{\beta}^2+(B+Ma^2)\dot{\alpha}^2\sin^2\beta+(C+Ma^2)\dot{\alpha}^2\cos^2\beta\right)$$

$$E_C(S_2/R_0)=\frac{1}{2}\left(A\dot{\beta}^2+(B\sin^2\beta+C\cos^2\beta+Ma^2)\dot{\alpha}^2\right)$$

Energie cinétique du balourd P :

$E_C(P/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(P)\right)^2$ or la vitesse $\vec{V}^0(P)$ est calculée précédemment, nous aurons :

$$E_C(P/R_0)=\frac{1}{2}mb^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta+\frac{1}{2}m\left(a\dot{\alpha}\cos\beta-b\dot{\beta}\right)^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta$$

$$E_C(P/R_0)=\frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta+a^2\dot{\alpha}^2\cos^2\beta-2ab\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+b^2\dot{\beta}^2+a^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta\right)$$

$$E_C(P/R_0)=\frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta-2ab\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+a^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2\right)$$

La somme des trois termes donne l'énergie cinétique totale du système :

$$E_C\left(\sum/R_0\right)=\frac{1}{2}I\dot{\alpha}+\frac{1}{2}\left(A\dot{\beta}^2+(B\sin^2\beta+C\cos^2\beta+Ma^2)\dot{\alpha}^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\alpha}^2\sin^2\beta-2ab\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta+a^2\dot{\alpha}^2+b^2\dot{\beta}^2\right)$$

$$E_C\left(\sum/R_0\right)=\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\left[I+B\sin^2\beta+C\cos^2\beta+Ma^2+m\left(b^2\sin^2\beta+a^2\right)\right]$$
$$+\left(A+mb^2\right)\dot{\beta}^2-2mab\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos\beta$$

Exercice 05 :

Un système de ventilation automatisé est composé de deux barres identiques et homogènes, soudées entre elles au point ***A*** et d'une hélice de rayon ***R*** et de masse ***M***.
(S_1): OA = L de masse **m ; (S_2): AB = L** de masse **m ; (S_3)**: Hélice avec: ***BM = BN = R*** **de masse** M . Le système est en mouvement comme le montre la ***figure (2).***

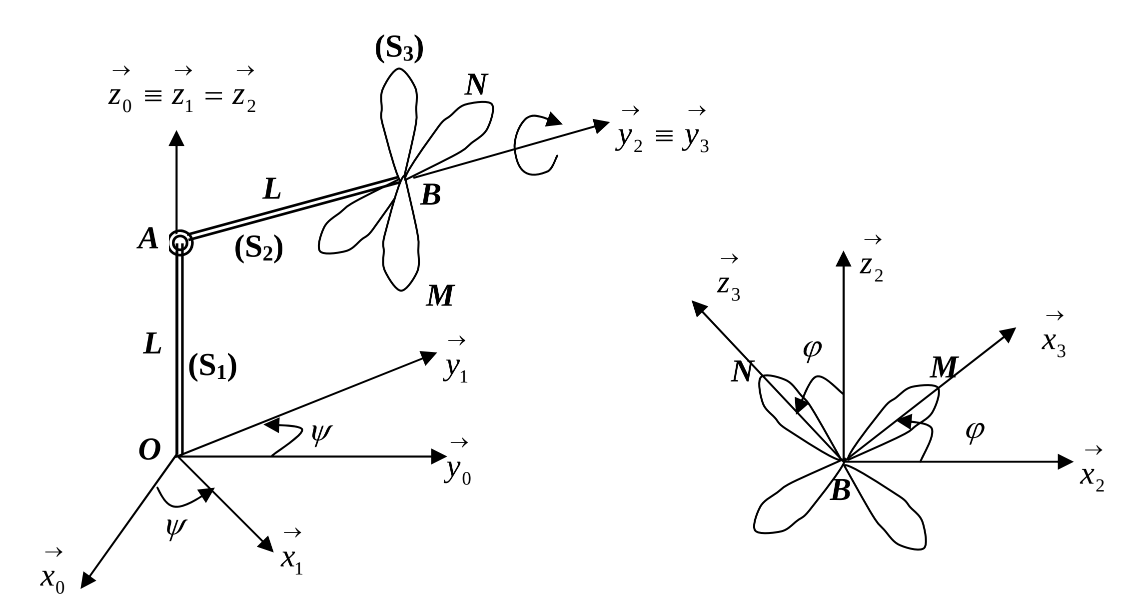
Le tenseur d'inertie en ***B*** de l'hélice dans R_2 est donné par : $I_B(S_3)_{R_2}=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_2}$

Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est en rotation par rapport à R_0 autour de l'axe $\vec{z}_0\equiv\vec{z}_1\equiv\vec{z}_2$ sens positif. Le repère $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ de centre ***A*** est tel que $\vec{y}_1//\vec{y}_2$.

Le repère $R_3(B,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ est en rotation par rapport à R_2 autour de l'axe $\vec{y}_2\equiv\vec{y}_3$ sens négatif. ***R_2*** **: est le repère de projection ; On considère que :** $\dot{\psi}=Cte$ **et** $\dot{\varphi}=Cte$

Déterminer :

1) Le centre d'inertie du système dans le repère ***R_2*** ;
2) Le tenseur d'inertie du système au point ***A*** dans le repère ***R_2*** ;
3) La matrice de passage de ***R_0*** vers ***R_1*** et de ***R_3*** vers ***R_2*** ;
4) La vitesse de rotation instantanée du repère ***R_3*** par rapport à ***R_0*** ;
5) La vitesse et l'accélération absolues du point ***B*** par dérivation ;
6) La vitesse et l'accélération absolues du point ***M*** par la cinématique du solide ;
7) La vitesse et l'accélération absolues du point ***N*** par composition de mouvement, ***R_2*** étant le repère relatif ;
8) Le moment cinétique du solide ***S_3*** au point ***A*** dans le repère ***R_2;***
9) Le moment dynamique du solide ***S_3*** au point ***A*** dans le repère ***R_2***;
10) L'énergie cinétique du système



Solution :

1) Centre d'inertie du système :

$$\overrightarrow{AG_1} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -L/2 \end{cases}_{R_2} \; ; \quad \overrightarrow{AG_2} = \begin{cases} 0 \\ L/2 \\ 0 \end{cases}_{R_2} \; ; \quad \overrightarrow{AG_3} = \begin{cases} 0 \\ L \\ 0 \end{cases}_{R_2} \quad \overrightarrow{AG} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{m.(L/2)+M.L}{2m+M} \\ \dfrac{-mL/2}{2m+M} \end{cases}_{R_2}$$

2) Tenseur d'inertie du système:

$$I_A(S_1) = \begin{bmatrix} mL^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & mL^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_2} \quad \text{et} \quad I_A(S_2) = \begin{bmatrix} mL^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$I_B(S_3) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_2} \; ; \quad \text{Huygens} \Rightarrow I_B(S_3) = \begin{bmatrix} A+ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A+ML^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$I_A(Système) = \begin{bmatrix} A+ML^2+2mL^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & B+mL^2/3 & 0 \\ 0 & 0 & A+ML^2+mL^2/3 \end{bmatrix}_{R_2}$$

3) Matrices de passage :

$$P_{R_0 \to R_1} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_{R_3 \to R_2} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

4) Vitesse de rotation instantanée du repère R_3 par rapport au repère R_0

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \vec{0} + \dot{\psi}\,\vec{z}_2 = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{cases}}$$

5) $\vec{V}^0(B)$ et $\vec{\gamma}^0(B)$ par dérivation

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = L\,\vec{z}_2 + L\,\vec{y}_2 = \begin{cases} 0 \\ L \\ L \end{cases} ;$$

$$\vec{V}^0(B) = \frac{d^0\overrightarrow{OB}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ L \\ L \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \quad ; \quad \text{avec } \frac{d^2\overrightarrow{OB}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^0\vec{V}^0(B)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}^0(B)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(B) = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{cases}}$$

$$; \text{avec } \frac{d^2\vec{V}^0(B)}{dt} = \vec{0}$$

6) $\vec{V}^0(M)$ et $\vec{\gamma}^0(M)$ par la cinématique du solide

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BM} \qquad \text{avec : } \overrightarrow{BM} = \underset{R_3}{\begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{cases}}$$

$$\vec{V}^0(M) = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} -L\dot{\psi} - R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^0(B) + \frac{d^0\vec{\Omega}_3^0}{dt} \wedge \overrightarrow{BM} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge (\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BM})$$

$\vec{\gamma}^0(B)$: déjà calculée

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_3^0}{dt} = \frac{d^2\vec{\Omega}_3^0}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\Omega}_3^0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

avec $\frac{d^2\vec{\Omega}_3^0}{dt} = \vec{0}$ ($\dot{\psi}$ $et\, \dot{\varphi}$ sont constantes)

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_3^0}{dt} \wedge \overrightarrow{BM} = \begin{Bmatrix} \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge (\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BM}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} R\cos\varphi \\ 0 \\ R\sin\varphi \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\psi}\cos\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge (\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BM}) = \begin{Bmatrix} -R\dot{\varphi}^2\cos\varphi - R\dot{\psi}^2\cos\varphi \\ -R\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

d'où : $$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{Bmatrix} -R\dot{\varphi}^2\cos\varphi - R\dot{\psi}^2\cos\varphi \\ -L\dot{\psi}^2 - 2R\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ -R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

7) $\vec{V}^0(N)$ et $\vec{\gamma}^0(N)$ par composition de mouvement

$$\vec{V}^0(N)=\vec{V}^2(N)+\vec{V}_2^0(N) \quad , \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=L\,\vec{y}_2+R\,\vec{z}_3=\begin{cases}-R\sin\varphi\\ L\\ R\cos\varphi\end{cases}$$

$$\vec{V}^2(N)=\frac{d^2\overrightarrow{AN}}{dt}=\ _{R_2}\begin{cases}-R\dot{\varphi}\cos\varphi\\ 0\\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}$$

$$\vec{V}_2^0(N)=\vec{V}^0(A)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AN}=\ _{R_2}\begin{cases}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{cases}\wedge\ _{R_2}\begin{cases}-R\sin\varphi\\ L\\ R\cos\varphi\end{cases}=\ _{R_2}\begin{cases}-L\dot{\psi}\\ R\dot{\psi}\cos\varphi\\ 0\end{cases}$$

$$\vec{V}^0(N)=\ _{R_2}\begin{cases}-L\dot{\psi}-R\dot{\varphi}\cos\varphi\\ R\dot{\psi}\cos\varphi\\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi\end{cases}$$

$$\vec{\gamma}^0(N)=\vec{\gamma}^2(N)+\vec{\gamma}_2^0(N)+\vec{\gamma}_c(N)$$

$$\vec{\gamma}^2(N)=\frac{d^2\vec{V}^2(N)}{dt}=\ _{R_2}\begin{cases}R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\\ 0\\ -R\dot{\varphi}^2\sin\varphi\end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(N)=\vec{\gamma}^0(A)+\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{AN}+\vec{\Omega}_2^0\wedge(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{AN})=\ _{R_2}\begin{cases}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{cases}\wedge\ _{R_2}\begin{cases}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{cases}\wedge\ _{R_2}\begin{cases}-R\sin\varphi\\ L\\ R\cos\varphi\end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(N)=\ _{R_2}\begin{cases}R\dot{\psi}^2\sin\varphi\\ -L\dot{\psi}^2\\ 0\end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_c(N) = 2\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(N) = 2 \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} -R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ -2R\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}^0(N) = \begin{cases} R\dot{\varphi}^2\cos\varphi + R\dot{\psi}^2\sin\varphi \\ -L\dot{\psi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi \\ -R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$$

8) Moment cinétique du solide *(S₃)* au point A

$$\vec{\sigma}^0(A) = \vec{\sigma}^0(B) + \overrightarrow{AB} \wedge M\vec{V}^0(B) = I_B\,\vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{AB} \wedge M\vec{V}^0(B)$$

$$\vec{\sigma}^0(A) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} \wedge M \begin{pmatrix} -L\dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = -B\dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + (A + ML^2)\dot{\psi}\,\vec{z}_2$$

9) Moment dynamique du solide *(S₃)* au point A

$$\vec{\delta}^0(A) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(A)}{dt} - \vec{V}^0(A) \wedge M\vec{V}^0(B) \quad \text{or} \quad \vec{V}^0(A) = \vec{0} \quad \text{alors :}$$

$$\vec{\delta}^0(A) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(A)}{dt} = \frac{d^2\vec{\sigma}^0(A)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(A)$$

avec $\dfrac{d^2\vec{\sigma}^0(A)}{dt} = \vec{0}$ car $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$: sont constantes

$$\vec{\delta}^0(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -B\dot{\varphi} \\ (A + ML^2)\dot{\psi} \end{pmatrix}_{R_2} = (B - A - ML^2)\dot{\psi}\dot{\varphi}\;\vec{x}_2$$

9) Energie cinétique du système au point A

solide (S_1) : $E_{c1} = 0$; $\vec{V}^0(G_1) = \vec{0}$ et $I_{zz} = 0$ dans $\boldsymbol{R_2}$

solide (S_2) : $E_{c2} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^0\, I_A\, \vec{\Omega}_2^0 = \frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi})\begin{bmatrix} mL^2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mL^2/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2$

solide (S_3) : $E_{c3} = \frac{1}{2}M\left(\vec{V}^0(B)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^0\, I_B\, \vec{\Omega}_3^0 = \frac{1}{2}M\left(L\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}(0,-\dot{\varphi},\dot{\psi})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

$$E_{c3} = \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2$$

Energie cinétique du système : ***$E_c = E_{c1} + E_{c2} + E_{c3}$***

$$E_c(Totale) = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3} + ML^2\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2$$

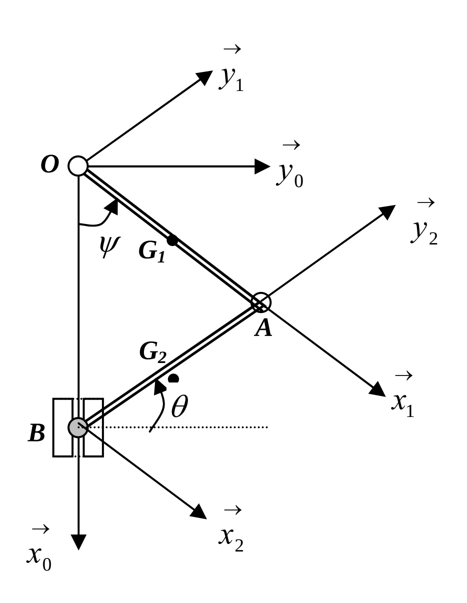
Exercice 06 :

On considère, dans le repère orthonormé $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le système mécanique constitué de deux barres homogènes ***(S1)*** lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ et ***(S2)*** lié au repère $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$
Les barres ont une longueur ***OA=AB = L*** , de masse ***m***, articulées au point ***A*** . Au point ***B*** est articulée un solide ***(S₃)*** qui est une masse ***M*** coulissante suivant l'axe $\vec{x}_0$. Soit ***G₁*** et ***G₂*** les centres d'inertie, respectifs des deux barres. ***On prendra*** R_0 ***comme repère de projection***.
Les tenseurs d'inertie des deux barres en leurs centres d'inertie respectifs sont donnés par :

$$I_{G1}(S_1)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}_{R_1} \quad ; \quad I_{G2}(S_2)=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&0&0\\0&0&A\end{bmatrix}_{R_2} \qquad \text{avec : } A=\frac{mL^2}{12}$$

Calculer en fonction de $(\psi,\dot{\psi},\ddot{\psi}$ et L :

1. Les vitesses et les accélérations absolues des points : ***G₁ , G₂ , B.***
2. Le torseur cinétique du système au point ***O*** ;
3. Le torseur dynamique du système au point ***O*** ;
4. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Vitesses et accélérations par dérivation :

1.a. Vitesses

Nous avons : $\theta=\frac{\pi}{2}-\psi \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\sin\psi$ et $\sin\theta=\cos\psi$

$$\overrightarrow{OG_1}=\begin{cases}(L/2)\cos\psi\\(L/2)\sin\psi\\0\end{cases}_{R_0} \quad\Rightarrow\quad \vec{V}^0(G_1)=\frac{d^0\overrightarrow{OG_1}}{dt}=\begin{cases}-(L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\begin{cases}L\cos\psi+(L/2)\cos\psi=(3L/2)\cos\psi\\L\sin\psi-(L/2)\sin\psi=(L/2)\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(G_2)=\frac{d^0\overrightarrow{OG_2}}{dt}=\begin{cases}-(3L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{cases} 2L\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(B) = \frac{d^0\overrightarrow{OB}}{dt} = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

1.b. Accélérations des points par dérivation :

$$\vec{\gamma}^0(G_1) = \frac{d^0\vec{V}^0(G_1)}{dt} = \begin{cases} -(L/2)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ (L/2)(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_2) = \frac{d^0\vec{V}^0(G_2)}{dt} = \begin{cases} -(3L/2)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ (L/2)(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^0\vec{V}^0(B)}{dt} = \begin{cases} -2L(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

2. Torseur cinétique du système au point *O* ;

Le torseur cinétique a pour éléments e réduction :

- la résultante qui est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque solide ;

$$\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(G_1) + m\vec{V}^0(G_2) + M\vec{V}^0(B) = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\sin\psi(m+M) \\ Lm\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

- le moment cinétique total qui est égal à la somme des moments cinétiques des solides.

$$\vec{\sigma}^0(\textstyle\sum/R_0) = \vec{\sigma}^0(S_1/R_0) + \vec{\sigma}^0(S_2/R_0) + \vec{\sigma}^0(S_3/R_0)$$

a) moment cinétique du solide (S_1) $:\vec{\sigma}^0(S_1/R_0) = I_{G1}.\vec{\Omega}_1^0 + \overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{V}^0(G_1)$

$$\vec{\sigma}^0(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{R_1} + \left\{\begin{array}{l} (L/2)\cos\psi \\ (L/2)\sin\psi \\ 0 \end{array}\right._{R_0} \wedge \left\{\begin{array}{l} -(L/2)\dot{\psi}\sin\psi \\ (L/2)\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$$

$$\vec{\sigma}^0(S_1/R_0) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ A\dot{\psi} + \dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mL^2}{12}\dot{\psi} + \dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mL^2}{3}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0}$$

b) moment cinétique du solide (S_2) : $\vec{\sigma}^0(S_2/R_0) = I_{G2}.\vec{\Omega}_2^0 + \overrightarrow{OG_2} \wedge m\vec{V}^0(G_2)$

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}_{R_1} + \left\{\begin{array}{l} (3L/2)\cos\psi \\ (L/2)\sin\psi \\ 0 \end{array}\right._{R_0} \wedge m \left\{\begin{array}{l} -(3L/2)\dot{\psi}\sin\psi \\ (L/2)\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$$

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ A\dot{\theta} + \dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mL^2}{12}\dot{\theta} + \dfrac{3mL^2}{4}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0}$$

or nous avons : $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \psi$ alors en dérivant nous avons : $\dot{\theta} = -\dot{\psi}$ en on obtient :

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2mL^2}{3}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0}$$

c) moment cinétique du solide (S_3) : $\vec{\sigma}^0(S_3/R_0) = \overrightarrow{OB} \wedge m\vec{V}^0(B) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{OB} \,//\, \vec{V}^0(B)$

d) Moment cinétique du système :

$$\vec{\sigma}^0(\sum/R_0) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{mL^2}{3}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0} + \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2mL^2}{3}\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ mL^2\dot{\psi} \end{array}\right._{R_0}$$

3. Torseur dynamique du système au point *O*

Les éléments du torseur dynamique sont :

- la résultante dynamique : $\vec{D} = m_1 \vec{\gamma}^0(G_1) + m_2 \vec{\gamma}^0(G_2) + m_3 \vec{\gamma}^0(G_3)$

$$\vec{D} = \begin{cases} -2L(m+M)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ mL(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

- le moment dynamique du système : $\vec{\delta}^0(\sum / R_0) = \dfrac{d^0 \vec{\sigma}^0(\sum / R_0)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ mL^2\ddot{\psi} \end{cases}_{R_0}$

4. Energie cinétique du système.

L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies cinétique de chaque solide par rapport au même repère.

$$E_C^0(\sum / R_0) = E_C^0(S_1 / R_0) + E_C^0(S_2 / R_0) + E_C^0(S_3 / R_0)$$

a) Energie cinétique du solide (S_1)

$$E_C^0(S_1 / R_0) = \frac{1}{2} m\left(\vec{V}^0(G_1)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T} . I_{G1}(S_1).\vec{\Omega}_1^0$$

$$E_C^0(S_1 / R_0) = \frac{1}{2} m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi})\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} A\dot{\psi}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2$$

b) Energie cinétique du solide (S_2)

$$E_C^0(S_2 / R_0) = \frac{1}{2} m\left(\vec{V}^0(G_2)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0T} . I_{G2}(S_2).\vec{\Omega}_2^0$$

$$E_C^0(S_2 / R_0) = \frac{1}{2} m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \left(9\sin^2\psi + \cos^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$E_C^0(S_2 / R_0) = \frac{mL^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} A\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\psi}^2$$

$$E_C^0(S_2 / R_0) = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\psi = mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6} + \sin^2\psi\right)$$

b) Energie cinétique du solide (S_3)

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(B)\right)^2=2ML^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

d) Energie cinétique du système :

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2+mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6}+\sin^2\psi\right)+2ML^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi=\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2+(m+2M)L^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2+(m+2M)L^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

Exercice 07 :

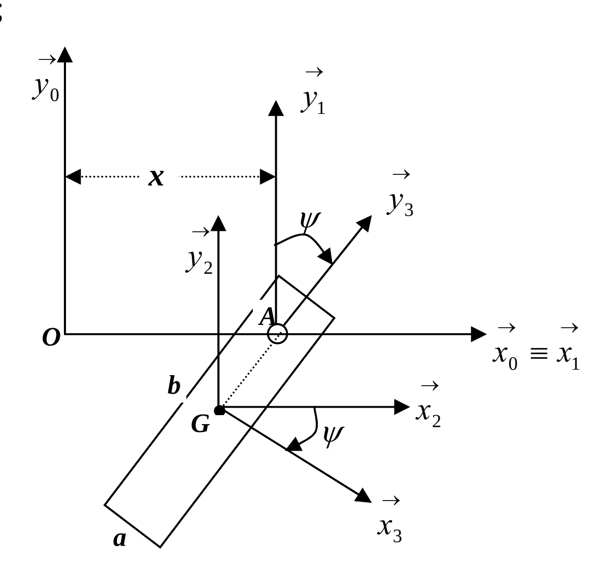
Soit une plaque homogène (S) rectangulaire de largeur ***2a***, de longueur ***2b*** et de centre de masse ***G***. Elle est rotation à une vitesse angulaire fixe autour de l'un des ses point ***A*** dans le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ tel que $\vec{z}_0\equiv\vec{z}_1\equiv\vec{z}_2\equiv\vec{z}_3$ et $(\vec{x}_1,\vec{x}_3)=(\vec{y}_1,\vec{y}_3)=\psi$. Le point ***A*** se déplace sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ tel que : $\overrightarrow{OA}=x\,\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{GA}=\frac{b}{3}\vec{y}_3$. On prendra $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ comme repère de projection. **Déterminer :**

1. La vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère R_0 : $\vec{\Omega}_3^0$
2. Les vecteurs vitesse et accélération absolues du point ***G*** : $\vec{V}^0(G)$ et $\vec{\gamma}^0(G)$;
3. Le moment cinétique de la plaque au point ***A*** ;
4. Le moment dynamique de la plaque point ***A*** ;
5. L'énergie cinétique de la plaque.

On donne :

$$I_G=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{R_3}$$

$$A=\frac{mb^2}{12}\quad,\quad C=\frac{m^2}{12}(a+b^2)$$



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère R_0 : $\vec{\Omega}_3^0$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad \text{avec} \quad \dot{\psi} = Cte$$

2. Vitesse et accélération absolues du point *G* : $\vec{V}^0(G)$ et $\vec{\gamma}^0(G)$;

2.1. Vitesse absolue du point *G* :

Par la cinématique du solide nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{AG}$

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{b}{3}\vec{y}_3 = -\frac{b}{3}\left(\cos\psi\,\vec{y}_1 + \sin\psi\,\vec{x}_1\right) = \begin{cases} -(b/3)\sin\psi \\ -(b/3)\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} -(b/3)\sin\psi \\ -(b/3)\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} \dot{x} - (b/3)\dot{\psi}\cos\psi \\ (b/3)\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

2.2. Accélération absolue du point *G* :

Par dérivation nous pouvons écrire : $\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G)$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} - \frac{b}{3}\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right) \\ \frac{b}{3}\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right) \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

3. Moment cinétique de la plaque au point *A* ;

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} + m \begin{cases} -\frac{b}{3}\sin\psi \\ -\frac{b}{3}\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} \dot{x} - \frac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi \\ \frac{b}{3}\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\left[-C\dot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\dot{\psi}\sin^2\psi+m\frac{b}{3}\cos\psi\left(\dot{x}-\frac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi\right)\right]\vec{z}_1$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\left[-C\dot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\dot{\psi}+m\frac{b}{3}\dot{x}\cos\psi\right]\vec{z}_1$$

4. Moment dynamique de la plaque au point A ;

$$\vec{\delta}_A(S/R_0)=\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}+\vec{V}^0(A)\wedge m\vec{V}^0(G)$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}=\frac{d^1\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\frac{d^1\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}\quad \text{car} \quad \vec{\Omega}_1^0=\vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}=\left[-C\ddot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\ddot{\psi}+m\frac{b}{3}\ddot{x}\cos\psi-m\frac{b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\sin\psi\right]\vec{z}_1$$

$$\vec{V}^0(A)\wedge m\vec{V}^0(G)=\underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}\dot{x}\\0\\0\end{array}\right.}\wedge\ m\ \underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}\dot{x}-(b/3)\dot{\psi}\cos\psi\\(b/3)\dot{\psi}\sin\psi\\0\end{array}\right.}=\underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}0\\0\\m\frac{b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\sin\psi\end{array}\right.}$$

on déduit : $\vec{\delta}_A(S/R_0)=\left[-C\ddot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\ddot{\psi}+m\frac{b}{3}\ddot{x}\cos\psi\right]\vec{z}_1$

3. Energie cinétique de la plaque (S)

$$E_C^0(S/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^{0^T}.I_G(S).\vec{\Omega}_3^0$$

$$E_C^0(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}-\frac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{3}\dot{\psi}\sin\psi\right)^2+\frac{1}{2}(0,0,-\dot{\psi})\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\-\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$E_C^0(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\frac{b^2}{9}\dot{\psi}^2-\frac{2b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\cos\psi\right)+\frac{1}{2}C\dot{\psi}^2$$

Exercice 08 :

Soit un système constitué d'une tige filetée ***OA*** lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$. La tige de masse négligeable tourne autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ avec une vitesse de rotation $\dot{\alpha} = Cte$.

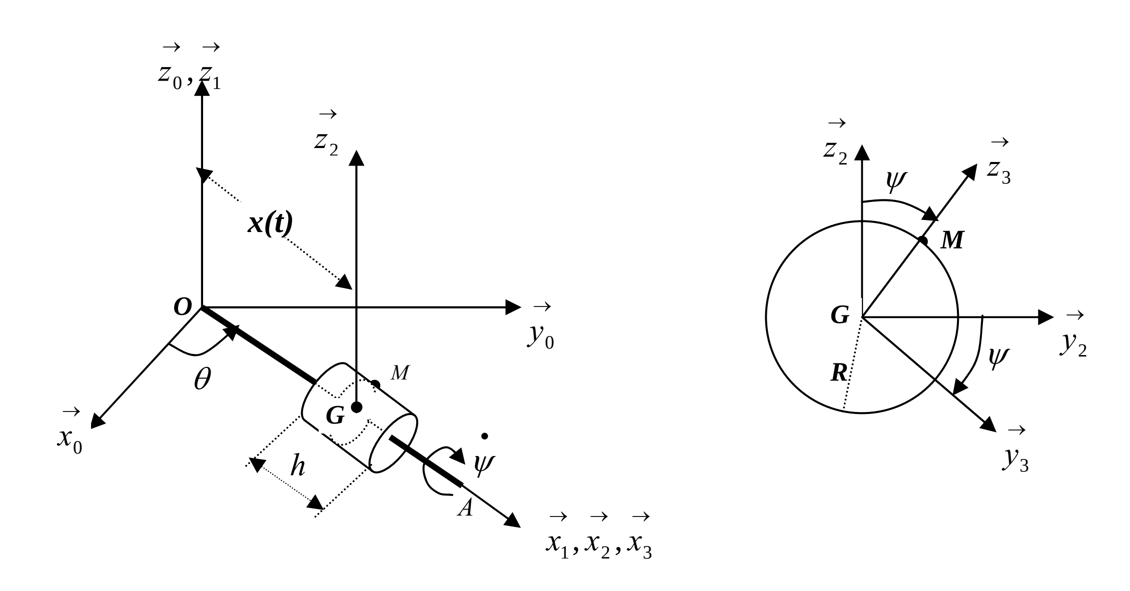
Un cylindre de masse ***m***, de hauteur ***h*** et de centre d'inertie ***G***, lié au repère $R_3(G,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ s'enroule autour de cette tige et il a deux mouvements:

- L'un, de translation de son centre d'inertie ***G***, lié au repère $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$, suivant l'axe de la tige $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ avec une vitesse linéaire $\dot{x}(t)$;
- L'autre, de rotation autour de l'axe $\vec{x}_2$ avec une vitesse de rotation $\dot{\psi} = Cte$ et tel que $(\vec{y}_2,\vec{y}_3) = (\vec{z}_2,\vec{z}_3) = \psi$

On prendra R_2 comme repère relatif et repère aussi de projection.

Déterminer :

1. Le tenseur d'inertie du cylindre au point G par rapport aux repères R_3 et R_2 ;
2. La vitesse de rotation instantanée du cylindre par rapport au repère R_0 ;
3. La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement ;
4. Les torseurs, cinétique et dynamique, au point O par rapport au repère R_0 ;
5. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Tenseur d'inertie du cylindre au point G par rapport aux repères R_3 et R_2 ;

Le tenseur d'inertie du cylindre dans le repère R_2 est donné par :

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} \end{bmatrix}_{R_3} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & & B \end{bmatrix} \quad \text{où } A = \frac{mR^2}{2} \; ; \; B = \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}$$

2. Vitesse de rotation instantanée du cylindre par rapport au repère R_0 ;

Le repère R_2 est en translation par rapport au repère R_1 alors : $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_2 - \dot{\psi}\,\vec{x}_2 = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_2}$$

3. Vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement :

3.1. Vitesse :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$; $\overrightarrow{GM} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{Bmatrix}_{R_3} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\sin\psi \\ R\cos\psi \end{Bmatrix}_{R_2}$

La vitesse absolue est égale à la vitesse relative plus la vitesse d'entraînement.

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M)$$

$$\vec{V}^2(M) = \frac{d^2\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\psi \\ -R\dot{\psi}\sin\psi \end{Bmatrix}_{R_2} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{GM}$$

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} \dot{x} \\ x\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{GM} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ R\sin\psi \\ R\cos\psi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -R\dot{\alpha}\sin\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme des termes on obtient :

$$\vec{V}^0(M) = \begin{cases} \dot{x} - R\dot{\alpha}\sin\psi \\ x\dot{\alpha} + R\dot{\psi}\cos\psi \\ -R\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_2}$$

3.2. Accélération :

L'expression de l'accélération absolue par composition de mouvement s'écrit :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^2(M) + \vec{\gamma}_2^0(M) + \vec{\gamma}_C(M)$$

$$\vec{\gamma}^2(M) = \frac{d^2\vec{V}^2(M)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ -R\dot{\psi}^2\sin\psi \\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M) = \vec{\gamma}_2^0(G) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} \wedge \overrightarrow{GM} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{GM} \quad ; \quad \text{avec} \;:\; \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^2\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{cases} \ddot{x} \\ \dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} \dot{x} \\ x\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} \ddot{x} - x\dot{\alpha}^2 \\ 2\dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{GM} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ R\sin\psi \\ R\cos\psi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} 0 \\ -R\dot{\alpha}^2\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(M)\right) = 2\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\psi \\ -R\dot{\psi}\sin\psi \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} -2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\psi}^2\sin\psi \\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} \ddot{x} - x\dot{\alpha}^2 \\ 2\dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -R\dot{\alpha}^2\sin\psi \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} -2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \begin{Bmatrix} \ddot{x} - x\dot{\alpha}^2 - 2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 2\dot{x}\dot{\alpha} - R\dot{\alpha}^2\sin\psi - R\dot{\psi}^2\sin\psi \\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi \end{Bmatrix}_{R_2}$$

4. Torseurs, cinétique et dynamique, au point O par rapport au repère R_0 ;

4.1. Torseur cinétique

Les deux éléments de réduction du torseur cinétique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{P} = m\vec{V}^0(G) = \begin{Bmatrix} m\dot{x} \\ mx\dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2}$;

- le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^0(G)$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} m\dot{x} \\ mx\dot{\alpha} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} = \begin{Bmatrix} -A\dot{\psi} \\ 0 \\ B\dot{\alpha} + mx^2\dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{Bmatrix} -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \left(\dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{mh^2}{3} + mx^2\right)\dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{R_2}$$

4.2. Torseur dynamique

Les deux éléments de réduction du torseur dynamique sont :

- la résultante dynamique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} m(\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2) \\ 2m\dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2}$;

- le moment dynamique : : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{V}^0(O) \wedge m\vec{V}^0(G)$ or $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$

d'où : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0)$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2mx\dot{x}\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \left(\dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{mh^2}{3} + mx^2\right)\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi}\dot{\alpha} \\ 2mx\dot{x}\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2}$$

5. Energie cinétique du système.

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^0 . I_G . \vec{\Omega}_3^0 + \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = \frac{1}{2}(-\dot{\psi}, 0, \dot{\alpha})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right)$$

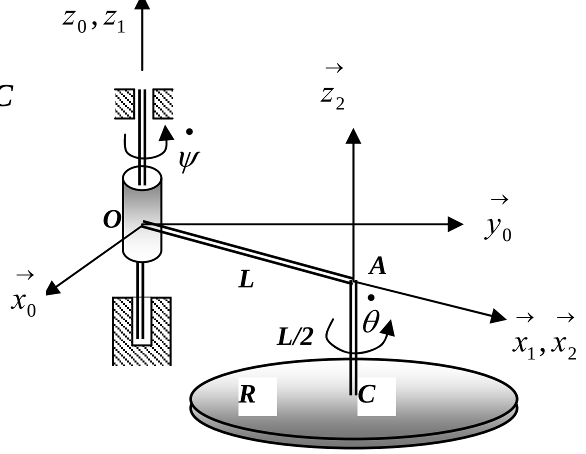
$$E_C = \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{mR^2}{2}\dot{\psi}^2 + \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3}\right)\dot{\alpha}^2 + m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right)\right]$$

Exercice 09 :

Une machine de ponçage des sols est composée d'un bras ***OAC*** de masse négligeable tel que ***OA=L***, ***AC=L/2*** et d'un disque de rayon ***R*** et de masse ***M*** . Le bras est en mouvement de rotation par rapport au bâti fixe avec une vitesse de rotation $\dot{\psi} = Cte$. Le disque tourne autour du bras ***AC*** avec une vitesse de rotation $\dot{\theta} = Cte$ On prendra R_1 comme repère de projection.

Déterminer :

1. Vitesse de rotation instantanée du disque
2. Vitesse et accélération absolues du point ***C***
3. Le torseur cinétique du disque en ***O*** ;
4. Le torseur dynamique du disque en ***O*** ;
5. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée du disque par rapport au repère R_0 :

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\theta} \end{cases}} \qquad \text{où} \qquad \dot{\psi} + \dot{\theta} = Cte$$

2. Vitesse et accélération du point *C* :

2.1. Vitesse :

Nous avons : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ -L/2 \end{cases}}$; $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ L/2 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$$

2.2. Accélération:

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0 \vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(C) \quad \text{avec} \quad \frac{d^1 \vec{V}^0(C)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

3. Le torseur cinétique du disque au point *O* :

Les deux éléments de réduction du torseur cinétique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$

- le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = I_C.\vec{\Omega}_2^0 + \overrightarrow{OC} \wedge M\vec{V}^0(C)$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_2}{\begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{bmatrix} + \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ L/2 \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_1}{\begin{cases} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{cases}}$$

4. Le torseur dynamique du disque au points *O* :

Les deux éléments de réduction du torseur dynamique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} -ML\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$;

- le moment dynamique : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \dfrac{d^1 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0)$

$$\frac{d^1 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{cases}}$$

5. Energie cinétique du système.

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^0 . I_G . \vec{\Omega}_2^0 + \frac{1}{2}M\left(\vec{V}^0(C)\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta},\ 0,\ 0\right)\begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2$$

Exercice 10 :

Le système mécanique représenté ci dessous est constitué de six solides.

- ***S₀*** : est un bâti fixe lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- ***S₁*** , ***S₂***, ***S₃*** , ***S₅*** : sont des barres de masses négligeables reliées entres elles par des liaisons rotoïdes parfaites ayant leurs axes perpendiculaire au plan formé par les barres ; ***S₂*** et ***S₃*** : ont la même longueur ***OB=AB=2a***
- ***S₄*** : est un volant de masse ***M*** de centre d'inertie ***G*** milieu de ***AB***, relié à ***S₃*** par une liaison rotoïde parfaite d'axe ***AB***.

Le tenseur d'inertie du solide ***S₄*** en son centre d'inertie ***G*** dans les repères R_3 et R_4 est donné par : $I_G(S_4)_{/R_3,R_4} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_3,R_4}$

S₁ : est lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, ***S₂*** : est lié au repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$,

S₃ : est lié au repère $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, ***S₄*** : est lié au repère $R_4(G, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$,

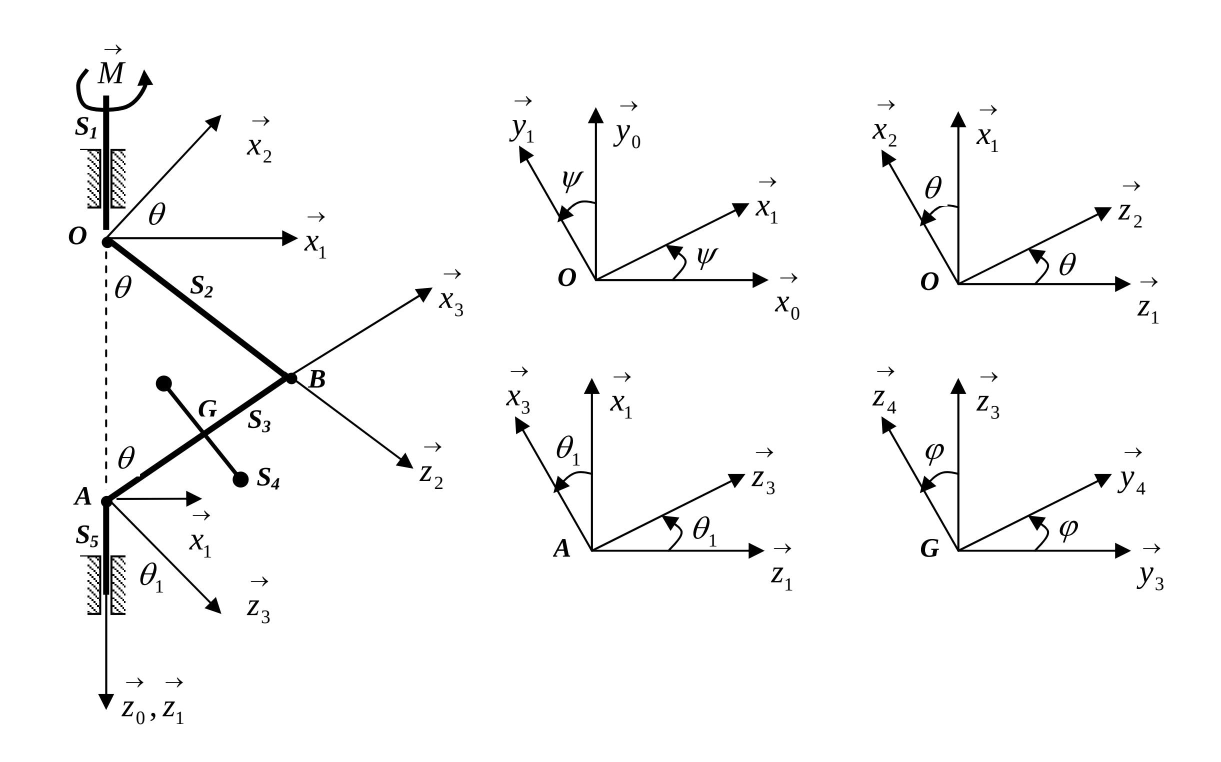
On applique un moment $\overrightarrow{M}$ sur le solide ***S₁*** à l'aide d'un moteur électrique.

Le point ***A*** se déplace sur l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et la solide ***S₅*** a un mouvement de translation suivant le même axe.

Déterminer :

1. La vitesse absolue $\vec{V}^0(G)$ dans R_3 et montrer que : $\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = K_1\dot{\theta}^2 + K_2\dot{\psi}^2$;
2. L'énergie cinétique du système ;
3. La puissance des efforts sachant que: $P(R_0/S_1) = 0$ et $P(R_0/S_5) = 0$;
4. Le moment cinétique du système en G dans le repère R_3 ;
5. Le moment dynamique du système en G dans le repère R_3 ;

On donne les figures planes suivantes :



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti S_0 fixe ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ lié à S_1 tel que : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$; $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

$R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ lié à S_2 tel que : $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\theta}\,\vec{y}_1 = \dot{\theta}\,\vec{y}_2$; $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_2$

$R_3(A,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$ lié à S_3 tel que : $\vec{\Omega}_3^1 = \dot{\theta}_1\,\vec{y}_1 = \dot{\theta}_1\,\vec{y}_3$; $\vec{y}_1 \equiv \vec{y}_3$ et $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

$R_4(G,\vec{x}_4,\vec{y}_4,\vec{z}_4)$ lié à S_4 tel que : $\vec{\Omega}_4^3 = \dot{\varphi}\,\vec{x}_3 = \dot{\varphi}\,\vec{x}_4$; $\vec{x}_3 \equiv \vec{x}_4$

Le point A est en translation sur l'axe $(O,\vec{z}_0)$

1. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ dans R_3

$\vec{V}^0(G) = \dfrac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \dfrac{d^3\,\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{OG}$; exprimons les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{\Omega}_3^0$ dans le repère R_3 :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} = 2a\,\vec{z}_2 - a\,\vec{x}_3$ et $\pi = \theta + \dfrac{\pi}{2} + \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

Ce qui donne : $\sin\theta_1 = \cos\theta$ et $\cos\theta_1 = \sin\theta$

A partir des figures planes, on peut écrire : $\vec{z}_2 = \cos\theta\,\vec{z}_1 + \sin\theta\,\vec{x}_1$ puis on explicite $\vec{z}_1$ *et* $\vec{x}_1$ dans le repère R_3.

$$\vec{z}_1 = -\sin\theta_1\,\vec{x}_3 + \cos\theta_1\,\vec{z}_3 = -\cos\theta\,\vec{x}_3 + \sin\theta\,\vec{z}_3$$

$$\vec{x}_1 = \cos\theta_1\,\vec{x}_3 + \sin\theta_1\,\vec{z}_3 = \sin\theta\,\vec{x}_3 + \cos\theta\,\vec{z}_3$$

$$\vec{z}_2 = \cos\theta\left(-\cos\theta\,\vec{x}_3 + \sin\theta\,\vec{z}_3\right) + \sin\theta\left(\sin\theta\,\vec{x}_3 + \cos\theta\,\vec{z}_3\right)$$

$$\vec{z}_2 = \left(\sin^2\theta - \cos\theta^2\right)\vec{x}_3 + 2\sin\theta\cos\theta\,\vec{z}_3 = \left(2\sin^2\theta - 1\right)\vec{x}_3 + 2\sin\theta\cos\theta\,\vec{z}_3$$

Nous avons ainsi : $\overrightarrow{OG} = 2a\,\vec{z}_2 - a\,\vec{x}_3 = 2a\left(\left(2\sin^2\theta - 1\right)\vec{x}_3 + 2\sin\theta\cos\theta\,\vec{z}_3\right) - a\,\vec{x}_3$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} 4a\sin^2\theta - 3a \\ 0 \\ 4a\sin\theta\cos\theta \end{cases}_{R_3}$$

; avec $\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^1 + \vec{\Omega}_1^0$ et comme : $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}$

$$\vec{\Omega}_3^0 = -\dot{\theta}\,\vec{y}_3 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 = -\dot{\theta}\,\vec{y}_3 + \dot{\psi}\left(-\cos\theta\,\vec{x}_3 + \sin\theta\,\vec{z}_3\right) = \begin{cases} -\dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_3}$$

d'où : $$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} 8a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ 0 \\ 2a\dot{\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{cases}_{R_3} + \begin{cases} -\dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_3} \wedge \begin{cases} 4a\sin^2\theta - 3a \\ 0 \\ 4a\sin\theta\cos\theta \end{cases}_{R_3}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} 8a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - 4a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ \dot{\psi}\sin\theta\left(4a\sin^2\theta - 3a\right) + \dot{\psi}\cos\theta\left(4a\sin\theta\cos\theta\right) \\ 2a\dot{\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \dot{\theta}\left(4a\sin^2\theta - 3a\right) \end{cases}_{R_3}$$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} 4a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ a\dot{\psi}\sin\theta \\ -a\dot{\theta} \end{cases}_{R_3}$$

$$\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = \left(2a\dot{\theta}\sin 2\theta\right)^2 + \left(a\dot{\psi}\sin\theta\right)^2 + \left(a\dot{\theta}\right)^2$$

$$\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = \left(a\dot{\theta}\right)^2(2\sin 2\theta + 1)^2 + (a\dot{\psi}\sin\theta)^2 = K_1\dot{\theta}^2 + K_2\dot{\psi}^2$$

2. Energie cinétique du système ;

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_4^{0T} . I_G(S_4).\vec{\Omega}_4^0 + \frac{1}{2}M\left(\vec{V}^0(G)\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left[-\dot{\psi}\cos\theta,\ -\dot{\theta},\ \dot{\psi}\sin\theta\right]\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}M\left(K_1\dot{\theta}^2 + K_2\dot{\psi}^2\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left[A\dot{\psi}^2\cos^2\theta + B\dot{\theta}^2 + B\dot{\psi}^2\sin^2\theta\right] + \frac{1}{2}M\left(K_1\dot{\theta}^2 + K_2\dot{\psi}^2\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(A\cos^2\theta + B\sin^2\theta + K_2 M\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(B + MK_1)\dot{\theta}^2$$

3. Puissance des efforts extérieurs, sachant que: $P(R_0/S_1) = 0$ et $P(R_0/S_5) = 0$;

Les liaisons sont sans frottement :

Nous avons : $P = \vec{M} \bullet \vec{\Omega}_4^0$ avec $\vec{M} = M\,\vec{z}_1 = M(-\cos\theta\,\vec{x}_3 + \sin\theta\,\vec{z}_3) = \begin{cases} -M\cos\theta \\ 0 \\ M\sin\theta \end{cases}_{R_3}$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \vec{\Omega}_4^3 + \vec{\Omega}_3^0 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$P = \vec{M} \bullet \vec{\Omega}_4^0 = \begin{pmatrix} -M\cos\theta \\ 0 \\ M\sin\theta \end{pmatrix}_{R_3} \bullet \begin{pmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix} = -M\cos\theta\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) + M\dot{\psi}\sin^2\theta$$

$$P = M\dot{\psi} - M\dot{\varphi}\cos\theta$$

4. Moment cinétique du système en G dans le repère R_3 ;

$$\vec{\sigma}_G(S) = I_G.\vec{\Omega}_4^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_3}\begin{pmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix}_{R_3} = \begin{pmatrix} A\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ -B\dot{\theta} \\ B\dot{\psi}\sin\theta \end{pmatrix}_{R_3}$$

5. Moment dynamique du système en G dans le repère R_3 ;

$$\vec{\delta}_G(S) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \frac{d^3 \vec{\sigma}_G(S)}{dt} + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \vec{\sigma}_G(S)$$

$$\vec{\delta}_G(S) = \begin{cases} A\left(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -B\ddot{\theta} \\ B\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases}_{R_3} + \begin{cases} -\dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_3} \wedge \begin{cases} A\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ -B\dot{\theta} \\ B\dot{\psi}\sin\theta \end{cases}_{R_3}$$

$$\vec{\delta}_G(S) = \begin{cases} A\left(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -B\ddot{\theta} - B\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + A\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ B\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) + B\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\theta}\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \end{cases}_{R_3}$$

$$\vec{\delta}_G(S) = \begin{cases} A\left(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -B\ddot{\theta} - B\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + A\dot{\psi}\sin\theta\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \\ B\ddot{\psi}\sin\theta + 2B\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta + A\dot{\theta}\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta\right) \end{cases}_{R_3}$$

Exercice 11 :

Le système mécanique représenté ci dessous est constitué de quatre solides.

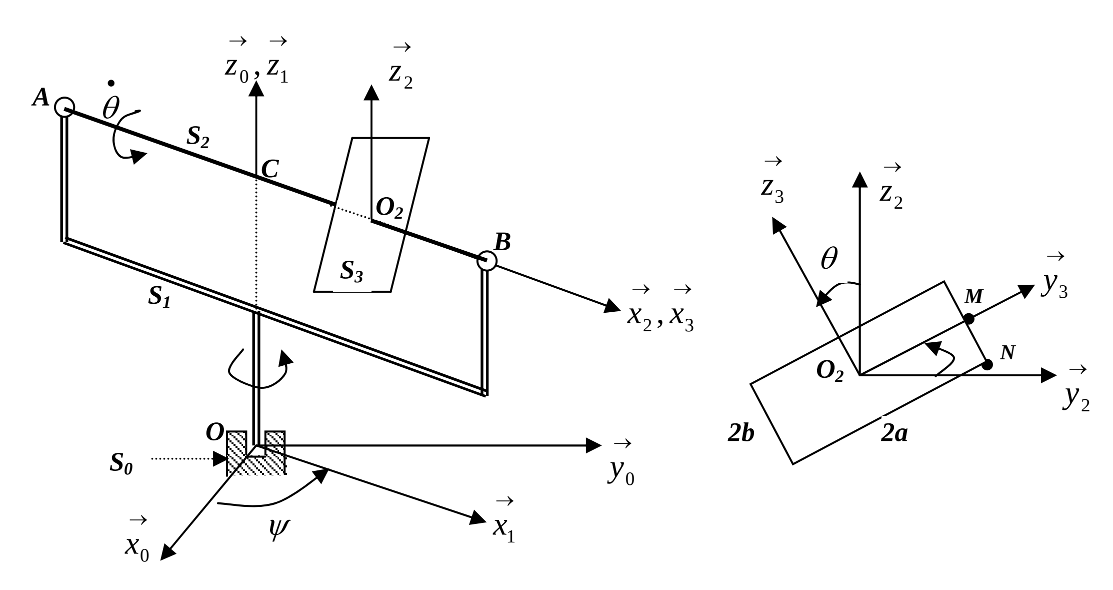
- ***S₀*** : est un bâti fixe lié au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$
- ***S₁*** : est un cadre relié au bâti fixe par une liaison sphérique parfaite au point ***O***. Il est lié au repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et en mouvement de rotation autour de $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ tel que : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) \equiv (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ et $\dot{\psi} = Cte$
- ***S₂*** : est une tige mince et homogène, de masse $\boldsymbol{m_1}$, de longueur ***AB=2L*** , liée au cadre par deux liaisons rotoïdes d'axe $\vec{x}_2, \vec{x}_3$
- ***S₃*** : est une plaque homogène rectangulaire, de masse $\boldsymbol{m_2}$ de dimensions ***2a*** x ***2b*** , soudée à la tige en son centre d'inertie $\boldsymbol{O_2}$, tel que $O_2C = \frac{2}{3}L$ et perpendiculaire à la tige ***AB*** . la plaque est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{x}_2 \equiv \vec{x}_3$ à une vitesse de rotation $\dot{\theta} = Cte$. On donne : ***OC = AC = CB = L*** .

Le tenseur d'inertie de la plaque en son centre d'inertie O_2 dans le repère R_3 est donné par :

$$I_{O_2}(S_3)_{/R_3} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_3} \quad \text{avec} \quad A = \frac{m_2}{3}(a^2+b^2) \;,\; B = \frac{m_2 b^2}{3} \;,\; C = \frac{m_2 a^2}{3}$$

Déterminer :

1. Le vecteur rotation instantané du repère R_3 par rapport à R_0 et exprimé dans R_0 ;
2. La vitesse du point ***M*** par rapport à R_0 et exprimé dans R_2 ;
3. L'accélération du point O_2 par rapport à R_0 et exprimé dans R_2 ;
4. La vitesse du point ***N*** par rapport à R_1 et exprimé dans R_2, sachant que : $\vec{V}^1(M) = \alpha(t)\,\vec{x}_2 + \beta(t)\,\vec{y}_2$;
5. Le moment cinétique de la tige ***AB*** au point O par rapport à R_0 et exprimé dans R_1 ;
6. Le moment cinétique de la plaque au point O_2 par rapport à R_2 et exprimé dans R_2 ;
7. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Vecteur rotation instantané du repère R_3 par rapport à R_0 et exprimé dans R_0 ;

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti S_0 fixe ;

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à S_1 tel que : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$; $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$

$R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à S_2 tel que : $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$; $\vec{x}_2 \equiv \vec{x}_1$, $\vec{z}_2 \equiv \vec{z}_1$

$R_3(O_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à S_3 tel que : $\vec{\Omega}_3^1 = \dot{\theta}\,\vec{x}_2 = \dot{\theta}\,\vec{x}_3$; $\vec{x}_2 \equiv \vec{x}_3$

$$OC = AC = CB = L \;;\; O_2C = \frac{2}{3}L$$

Nous avons : $\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \vec{0} + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$ avec : $\vec{x}_1 = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\theta}\left(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0\right) + \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = {}_{R_0}\begin{cases} \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{cases}$$

2. Vitesse du point M par rapport à R_0 et exprimé dans R_2 ;

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO_2} + \overrightarrow{O_2M} = L\,\vec{z}_2 + \frac{2}{3}L\,\vec{x}_2 + a\,\vec{y}_3 = L\,\vec{z}_2 + \frac{2}{3}L\,\vec{x}_2 + a\left(\cos\theta\,\vec{y}_2 + \sin\theta\,\vec{z}_2\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = {}_{R_2}\begin{cases} \frac{2}{3}L \\ a\cos\theta \\ L + a\sin\theta \end{cases} \;;\; \text{et} \quad \vec{V}^0(M) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\vec{V}^0(M) = {}_{R_2}\begin{cases} 0 \\ -a\dot{\theta}\sin\theta \\ a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases} + {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge {}_{R_2}\begin{cases} \frac{2}{3}L \\ a\cos\theta \\ L + a\sin\theta \end{cases} = {}_{R_2}\begin{cases} -a\dot{\psi}\cos\theta \\ -a\dot{\theta}\sin\theta + \frac{2}{3}L\dot{\psi} \\ a\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

3. Accélération du point O_2 par rapport à R_0 et exprimé dans R_2 ;

$$\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO_2} = L\,\vec{z}_2 + \frac{2}{3}L\vec{x}_2 \;{}_{R_2}\begin{cases} \frac{2}{3}L \\ 0 \\ L \end{cases} \;;\; \vec{V}^0(O_2) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OO_2}$$

$$\vec{V}^0(O_2) = \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OO_2} \quad \text{car} \quad \frac{d^2\,\overrightarrow{OO_2}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{V}^0(O_2) = {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge {}_{R_2}\begin{cases} \frac{2}{3}L \\ 0 \\ L \end{cases} = {}_{R_0}\begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3}L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

L'accélération se déduit par dérivation :

$$\vec{\gamma}^0(O_2) = \frac{d^0 \vec{V}^0(O_2)}{dt} = \frac{d^2 \vec{V}^0(O_2)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^0(O_2) \quad \text{avec : } \frac{d^2 \vec{V}^0(O_2)}{dt} = \vec{0} \quad \text{car} \quad \dot{\psi} = Cte$$

d'où : $\vec{\gamma}^0(O_2) = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3} L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} -\frac{2}{3} L\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$

4. Vitesse $\vec{V}^0(N)$ dans R_2 , sachant que : $\vec{V}^1(M) = \alpha(t)\vec{x}_2 + \beta(t)\vec{y}_2$

Nous avons par la cinématique du solide : $\vec{V}^1(N) = \vec{V}^1(M) + \vec{\Omega}_3^1 \wedge \overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN} = \underset{R_3}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -b \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ b\sin\theta \\ -b\cos\theta \end{cases}}$$

$$\vec{V}^1(N) = \alpha(t)\vec{x}_2 + \beta(t)\vec{y}_2 + \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -b\sin\theta \\ b\cos\theta \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} \alpha(t) + b\dot{\theta}\sin\theta \\ \beta(t) \\ 0 \end{cases}}$$

5. Moment cinétique de la tige *AB* au point *O* par rapport à R_0 et exprimé dans R_1 ;

$$\vec{\sigma}^0(O) = \vec{\sigma}^0(C) + \overrightarrow{OC} \wedge m_1 \vec{V}^0(C) = \vec{\sigma}^0(C) = I_C . \vec{\Omega}_2^0 \quad \text{car} \quad : \vec{V}^0(C) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_C . \vec{\Omega}_1^0 = \underset{R_2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 L^2}{3} \end{bmatrix}} \underset{R_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}} = \underset{R_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_1 L^2}{3}\dot{\psi} \end{bmatrix}} = \frac{m_1 L^2}{3}\dot{\psi}\,\vec{z}_2 = \frac{m_1 L^2}{3}\dot{\psi}\,\vec{z}_1$$

6. Moment cinétique de la plaque au point O_2 par rapport à R_2 et exprimé dans R_2 ;

$$\vec{\sigma}^0(O_2) = I_{O2} . \vec{\Omega}_3^2$$

$$\vec{\sigma}^0(O_2) = {}_{R_2}\begin{bmatrix} \frac{m_2}{3}(a^2+b^{2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{3} \end{bmatrix}_{R_2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = {}_{R_2}\begin{bmatrix} \frac{m_2}{3}(a^2+b^{2)}\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}^0(O_2) = \frac{m_2}{3}(a^2+b^2)\dot{\theta}\ \vec{z}_2$$

8. Energie cinétique du système.

$$E_C(Système) = E_C(S_2) + E_C(S_3)$$

$$E_C(S_2) = \frac{1}{2}m_1\left(\vec{V}^0(C)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0^T}.I_C(S_3).\frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^0$$

$$E_C(S_2) = \frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi}).\ {}_{R_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 L^2}{3} \end{bmatrix}_{R_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{m_1 L^2}{6}\dot{\psi}^2$$

$$E_C(S_3) = \frac{1}{2}m_2\left(\vec{V}^0(O_2)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^{0^T}.I_C(S_3).\frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^0$$

$$E_C(S_3) = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2}{3}L\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\theta},0,0)\ {}_{R_2}\begin{bmatrix} \frac{m_2}{3}(a^2+b^{2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 b^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 a^2}{3} \end{bmatrix}_{R_2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_C(S_3) = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2}{3}L\dot{\psi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2}{3}(a^2+b^2)\dot{\theta}^2 = \frac{2m_2L^2}{9}\dot{\psi}^2 + \frac{m_2}{6}(a^2+b^2)\dot{\theta}^2$$

$$E_C(Système) = \frac{m_1L^2}{6}\dot{\psi}^2 + \frac{2m_2L^2}{9}\dot{\psi}^2 + \frac{m_2}{6}(a^2+b^2)\dot{\theta}^2$$

$$E_C(Système) = \left(\frac{m_1}{6} + \frac{2m_2}{9}\right)L^2\dot{\psi}^2 + \frac{m_2}{6}(a^2+b^2)\dot{\theta}^2$$

CHAPITRE IX

THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

1. Objectif de la dynamique

La dynamique permet d'analyser les liens existant entre les mouvements déjà décrits par la cinématique et les forces où actions qui leurs ont donné naissance.

Elle permet d'examiner le concept de force et d'une manière globale le concept d'efforts exercés sur un système matériel quelconque. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à introduire la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

2. Notions de référentiels

A partir du principe de l'action et de la réaction et du principe fondamental de la dynamique, nous pouvons établir les théorèmes généraux de la dynamique dans un référentiel Galiléen ou non Galiléen.

En effet, un référentiel est dit Galiléen ou (absolu) si les lois de Newton exprimées dans celui-ci sont valables. Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère Galiléen est lui aussi Galiléen, car les accélérations constatées à partir d'un même point seront les même dans les deux repères.

3. Expression de la loi fondamentale de la dynamique

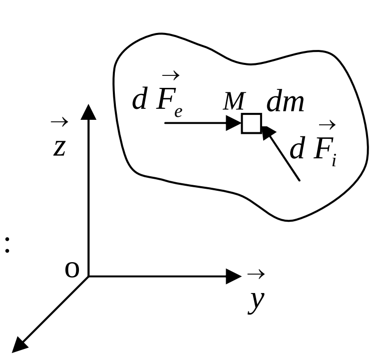
Soit un système matériel *(S)* non isolé et soumis à des interactions dans un repère Galiléen $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Pour ce système matériel on distingue deux types d'actions :

- Les actions mécaniques intérieures, résultant des actions d'une partie de *(S)* sur une autre partie de *(S)* ; *ces actions sont appelées forces intérieures et notées :* $d\vec{F}_i$;
- Les actions mécaniques extérieures résultant des actions du reste de l'univers (le milieu extérieur) sur *(S)* , ces actions sont appelées forces extérieures et notées : $d\vec{F}_e$.

Il faut choisir convenablement les conditions aux limites du système pour pouvoir classer les actions (forces) intérieures et extérieures.

En un point quelconque M du système *(S)* , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$d\vec{F}_i + d\vec{F}_e = \vec{\gamma}(M)dm$



dm : élément de masse au voisinage du point M ;

$\vec{\gamma}(M)$: accélération du point M .

En sommant sur l'ensemble du système matériel, nous avons :

$\int_S d\vec{F}_i + \int_S d\vec{F}_e = \int_S \vec{\gamma}(M)dm$

En un point A quelconque de l'espace les moments, de ces forces, sont donnés par :

$$\int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_i + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_e = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(M)dm$$

Nous supposons que le système matériel (S) n'échange pas de matière avec d'autres systèmes et que sa masse totale est constante.

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur *(S)* sont représentées par un torseur $[\tau_{Fext}]_A$: appelé torseur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A sont : $[\tau_{Fext}]_A = \begin{cases} \vec{F}_{ext} \\ \overrightarrow{M}_{Aext} \end{cases}$

$\vec{F}_{ext}$: est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système *(S)*

$\overrightarrow{M}_{Aext}$: est le moment au point *A* des forces extérieures s'exerçant sur le système *(S)*.

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le torseur dynamique $[D]_A$ du système (S) est égal au torseur des forces extérieures $[\tau_{Fext}]_A$ calculé au même point A .

Les éléments de réduction du torseur dynamique $[D]_A$ *du système (S)* dans le repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ sont : $[D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases}$

$\vec{D}$: la résultante dynamique ; $\vec{\delta}_A$: le moment dynamique au point *A*.

L'égalité des deux torseurs induit l'égalité de leurs éléments de réduction. Ce principe équivaut à la généralisation des lois de Newton. Les éléments des deux torseurs peuvent être calculés séparément et ensuite faire l'égalité des expressions obtenues.
Le point A par rapport auquel on calcul les moments est un point quelconque, il faut faire un choix judicieux pour faciliter l'écriture des équations. Souvent dans les problèmes de mécanique, on choisi le centre de masse du système car le moment d'inertie intervenant dans les calculs est plus facile à déterminer.

3.1. Théorème de la résultante dynamique

Soit un système matériel *(S)* en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *La résultante dynamique du système matériel (S) est égale à la résultante des actions (forces) mécaniques extérieures.*

$$\vec{D}(S/R_0) = m\vec{\gamma}^0(G/R_0) = \sum \vec{F}_{ext}$$

G : est le centre de masse du système.
La résultante des forces extérieures est égale à la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

3.2. Théorème du moment dynamique

Soit un système matériel *(S)* en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *Le moment dynamique du système matériel (S) en un point A quelconque est égale au moment des actions (forces) mécaniques extérieures au même point A.*

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \overrightarrow{M}_A(S/R_0)$$

Au centre d'inertie du système cette égalité s'écrirait :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \overrightarrow{M}_G(S/R_0) = \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$

Comme nous l'avons déjà montré précédemment, le moment cinétique au point G centre d'inertie du système est indépendant du repère dans lequel il est mesuré, alors il est souvent plus simple d'effectuer le calcul des moments dynamiques au centre d'inertie des systèmes.

Remarque :

Le moment dynamique d'un système composé est égal à la somme des moments dynamiques des éléments qui le compose par rapport au même point.

3.3. Equations scalaires déduites du principe fondamental

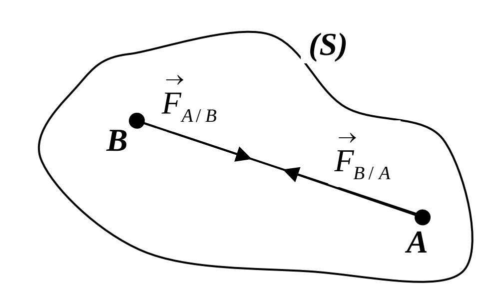
Les équations vectorielles de la résultante et du moment dynamique conduisent chacune à trois équations scalaires, soit pour les deux à six équations scalaires pour un système matériel donné.

Le choix du repère pour expliciter l'équation de la résultante dynamique est le choix du point où sera calculé le moment dynamique doivent être judicieux de manière à simplifier l'écriture mathématique des équations scalaires.

Ces équations scalaires sont des équations différentielles de second ordre et en générale non linéaires. Elles contiennent les caractéristiques d'inertie et les données géométriques du système ainsi que les composantes d'actions mécaniques appliquées au système.

4. Principe de l'action et de la réaction

Deux points A et B quelconque d'un système matériel *(S)* sont en interaction, ils s'influencent mutuellement par les actions et les réactions de l'un sur l'autre.



$\vec{F}_{A/B}$: action de A sur B

$\vec{F}_{B/A}$: action de B sur A

Ces deux actions s'équilibrent, le principe de l'action et de la réaction se traduit par l'équation : $\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$

Cette expression signifie que les actions sont portées par la droite qui joint les deux points A et B, on peut écrire alors : $\vec{F}_{A/B} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}_{B/A} = \lambda\ \overrightarrow{BA}$

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \lambda\ \overrightarrow{AB} + \lambda\ \overrightarrow{BA} = \lambda\ (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

4.1. Théorème de l'action et de la réaction

Soient deux systèmes matériels *(S₁)* et *(S₂)* en mouvement dans un référentiel Galiléen R_0.

Appelons *(S)* le système constitué de la réunion des deux systèmes : $(S)=(S_1)\cup(S_2)$

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_1) se décompose en :

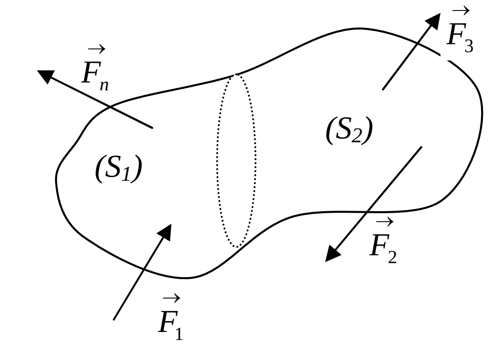
- $[\tau]_{Fext1}$: résultant des actions du milieu extérieur *(S)* sur (S_1) ;
- $[\tau]_{12}$: résultant des actions de (S_2) sur (S_1) ;

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_2) se décompose, en :

- $[\tau]_{Fext2}$: résultant des actions du milieu extérieur *(S)* sur (S_2) ;
- $[\tau]_{21}$: résultant des actions de (S_1) sur (S_2) ;

Appliquons le principe fondamental de la dynamique dans le repère Galiléen R_0 aux différents systèmes :

- à (S_1) : $[D]_1=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{12}$
- à (S_2) : $[D]_2=[\tau]_{Fext2}+[\tau]_{12}$
- à (S) : $[D]=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{Fext2}$



Sachant que : $[D]=[D]_1+[D]_2$

en les remplaçant par leurs expressions on obtient :

$$[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{Fext2}=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{21}+[\tau]_{Fext2}+[\tau]_{12} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau]_{12}+[\tau]_{12}=0 \;\Rightarrow\; [\tau]_{21}=-[\tau]_{12}$$

Cette expression traduit le théorème de l'action et de la réaction. Pour le système matériel *(S)* la relation : $[\tau]_{12}+[\tau]_{12}=0$ caractérise les actions intérieures.

D'une manière générale, lorsqu'il est possible de caractériser toutes les actions mécaniques intérieures à un système matériel *(S)* par un torseur $[\tau]_{F\,\text{int}}$, celui-ci est toujours nul.

$$[\tau]_{F\,\text{int}}=0$$

4.2. Propriétés des forces intérieures

Le torseur des forces intérieures a comme éléments de réduction : $[\tau]_{F\,\text{int}}=\begin{cases}\vec{R}_{\text{int}}=\vec{0}\\ \vec{M}_{A\,\text{int}}=\vec{0}\end{cases}$

$$\vec{R}_{\text{int}}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji})=\vec{0} \qquad \text{action réaction} \quad \vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$$

Le moment des forces intérieures en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$$\vec{M}_{A\text{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{AM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + (\overrightarrow{AM}_i + \overrightarrow{M_iM}_j) \wedge \vec{F}_{ji} \right)$$

$$= \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \overrightarrow{M_iM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \vec{0}$$

car $(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_iM}_j \wedge \vec{F}_{ji} = \vec{0}$

Le torseur des forces intérieures est toujours un torseur nul : $[\tau]_{F\,\text{int}} = 0$

5. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

Soit un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un système matériel *(S)* lié à un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement quelconque mais déterminé et connu par rapport à R_0.

L'application du théorème fondamental au système matériel *(S)* dans son mouvement par rapport au repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ se traduit par l'égalité du torseur dynamique du système et du torseur des forces extérieures en un point A quelconque et s'écrit :

$$[D]_{A/R_0} = [\tau_{Fext}]_{A/R_0}$$

$$[D]_{A/R_0} = \begin{cases} \vec{D} = \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm \\ \vec{\delta}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment en cinématique du solide que la loi de composition des vecteurs accélérations s'écrit :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \left(\vec{\gamma}^0(O_1) + \frac{d^0 \vec{\Omega}_1^0}{\text{dt}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) + 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right)$$

Sous forme réduite cette expression s'écrit : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \vec{\gamma}_1^0(M) + \vec{\gamma}_C(M)$

$\vec{\gamma}^0(M)$: accélération absolue du point M ;

$\vec{\gamma}^1(M)$: accélération relative du point M ;

$\vec{\gamma}_1^0(M)$: accélération d'entraînement du point M ;

$\vec{\gamma}_C(M)$: accélération de Coriolis (ou complémentaire) du point M.

Ces trois accélérations donnent naissance à des résultantes dynamiques et à des moments dynamiques en un point A quelconque de l'espace, nous aurons ainsi les trois torseurs suivants:

$$[D]_{A/R_0} = [D]_{A/R_1} + [D_{ie}]_A + [D_{ic}]_A = [\tau_{Fext}]_{A/R_0}$$

- Torseur dynamique du système (S) dans son mouvement relatif par rapport à R_1 :

$$[D]_{A/R_1} = \begin{cases} \int_S \vec{\gamma}^1(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^1(M)dm \end{cases}$$

- Torseur des forces d'inertie d'entraînement du système (S)

$$[D_{ie}]_{A\in R_1/R_0} = \begin{cases} \int_S \vec{\gamma}_1^0(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M)dm \end{cases}$$

- Torseur des forces de Coriolis :

$$[D_{ic}]_A = \begin{cases} \int_S 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm \end{cases}$$

En remplaçant les expressions des trois torseurs, nous déduisons facilement le torseur dynamique dans le repère non Galiléen R_1 :

$$[D]_{A/R_1} = [\tau_{Fext}]_{A/R_0} - [D_{ie}]_{A\in R_1/R_0} - [D_{ic}]_A$$

Cette expression d'égalité des torseurs se traduit par deux équations vectorielles :

$$\int_S \vec{\gamma}^1(M)dm = \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \vec{\gamma}_1^0(M)dm - \int_S 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^1(M)dm = \overrightarrow{AM} \wedge \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M)dm - \int_S \overrightarrow{AM} \wedge 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm$$

Les actions d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des actions immatérielles, donc fictives qui traduisent l'influence du mouvement d'un repère non Galiléen par rapport à un repère Galiléen.

6. Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide où d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique.

De plus la dérivée de l'énergie cinétique est liée à la puissance des efforts intérieurs et extérieurs agissant sur le solide.

6.1. Travail et puissance d'une force

Soit un système discret composé de n particules M_i de masse m_i, mobiles dans un référentiel Galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Soit $\overrightarrow{OM_i}$ le vecteur position dans le repère R de la particule M_i, son vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{V}(M_i) = \frac{d\,\overrightarrow{OM_i}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\,\overrightarrow{OM_i} = \vec{V}(M_i)dt$$

$d\,\overrightarrow{OM_i}$: le vecteur déplacement élémentaire durant un temps dt

Si la particule M_i est soumise à une force $\vec{F_i}$, le travail élémentaire de cette force est égale à :

$$dW_i = \vec{F_i} \bullet d\,\overrightarrow{OM_i}$$

La puissance que reçoit la particule M_i est égal à :

$$P_i = \frac{dW_i}{dt} = \vec{F_i} \bullet \frac{d\,\overrightarrow{OM_i}}{dt} = \vec{F_i} \bullet \vec{V}(M_i)$$

il faut noter que chaque terme $\vec{F_i}$ contient les forces intérieures $\vec{F}_{i\,int}$ et extérieures $\vec{F}_{iext}$ tel que : $\vec{F_i} = \vec{F}_{i\,int} + \vec{F}_{iext}$; pour l'ensemble du système nous aurons :

$$W = \sum_i \vec{F_i} \bullet d\,\overrightarrow{OM_i} = \sum_i (\vec{F}_{i\,int} + \vec{F}_{iext}) \bullet d\,\overrightarrow{OM_i}$$

$$P = \sum_i \vec{F_i} \bullet \vec{V}(M_i) = \sum_i (\vec{F}_{i\,int} + \vec{F}_{iext}) \bullet \vec{V}(M_i)$$

6.2. Théorème de l'énergie cinétique

L'ensemble des n particules M_i de masse m_i et de vitesse $\vec{V}(M_i)$ en mouvement dans le référentiel Galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ a pour énergie cinétique

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}(M_i) \right)^2$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps donne :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{V}(M_i)}{dt} \bullet \vec{V}(M_i)$$

or la force à laquelle est soumise la particule M_i est égale à : $\vec{F}_i = m_i \dfrac{d\vec{V}(M_i)}{dt}$, on obtient

ainsi : $\dfrac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \bullet \vec{V}(M_i) = P$

Comme la force $\vec{F}_i$ contient des forces d'origines intérieures et extérieures, cette relation

peut s'écrire : $\dfrac{dE_C}{dt} = P_{\text{int}} + P_{ext}$

P_{int} : puissance fournie au système par les forces intérieures ;

P_{ext} : puissance fournie au système par les forces extérieures.

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

En intégrant l'expression précédente entre deux instants t_1 et t_2, le théorème de l'énergie

cinétique devient : $E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (P_{\text{int}} + P_{ext}) dt$

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{\text{int}} + W_{ext}$$

la variation de l'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces intérieures et extérieures qui s'appliquent sur l'ensemble des particules.

6.3. Energie cinétique d'un solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable l'énergie cinétique est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2(M)dm$$

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au solide *(S)* indéformable, en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$.

Soit $\vec{\Omega}_1^0$: la vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_2 et M un point quelconque du solide, nous écrire par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 a pour expression : $\frac{dE_C^0}{dt} = \int_S \vec{V}^0(M) \bullet \frac{d\vec{V}^0(M)}{dt} dm = \int_S \vec{V}^0(M) \bullet \vec{\gamma}^0(M)dm$

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) \bullet \vec{\gamma}^0(M)dm$$

en utilisant la règle de permutation dans le produit mixte, l'expression devient :

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \vec{V}^0(O_1) \bullet \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme de produit de deux torseurs :

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(O_1) \end{Bmatrix} \bullet \begin{Bmatrix} \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm \end{Bmatrix} = [C]_{O_1} \bullet [D]_{O_1}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinématiques et dynamiques, elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélérations absolues.
On a vu précédemment, d'après le théorème fondamental de la dynamique que le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs pour un solide indéformable, d'où l'expression finale :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{ext}$$

6.4. Conservation de l'énergie totale

Le théorème de l'énergie cinétique peut alors s'écrire :

$$dE_C = P_{ext}dt = dW_{ext}$$

Si toutes les forces extérieures dérivent d'une fonction potentielle $U(r)$ indépendante du temps, elles peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{F}_{ext} = -\overrightarrow{grad}\, U(r)$ et on déduit :

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext} \bullet d\,\vec{r} = -dU(r)$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$dE_C = -dU(r) \quad \Leftrightarrow \quad d(E_C + U) = 0$ et finalement : $E_C + U = Cte$

$$\boldsymbol{E_C + U = E}\ , \qquad \textbf{\textit{E : Energie totale}}$$

Cette expression traduit le théorème de conservation de l'énergie totale.

7. Dynamique des solides en contacts

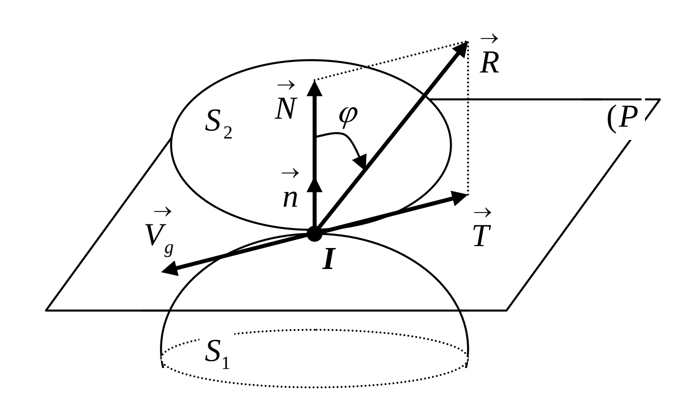
7.1. Actions de contact entre deux solides : Lois de Coulomb

Les lois de coulomb introduisent les notions de frottement de glissement entre les solides.

Soient deux solides *(S_1)* et *(S_2)* liés aux repères R_1 et R_2 mobiles par rapport à un repère R_0 fixe. Les deux solides en mouvement sont assujettis à un contact ponctuel à tout instant en un point I appartenant au plan *(P)* tangent en ce point aux deux solides.

$\vec{n}$ normale en I au plan *(P)*

$\vec{T} \in (P)$



Au point de contact des deux solides nous pouvons distinguer :

$I_1 \in S_1$: point du solide S_1 en contact avec le solide S_2 à l'instant t ;

$I_2 \in S_2$: point du solide S_2 en contact avec le solide S_1 au même instant t ;

$I \in R_0$: la position commune de $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ au même instant t ;

Le point géométrique I n'appartient ni à S_1 ni à S_2. Les points I, I_1, I_2 occupent géométriquement la même position mais ils ont des rôles cinématiques différents.

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 appartient au plan *(P)* tangent au point de contact, elle est donnée par la relation :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1)$$

Le solide S_1 exerce une action sur le solide S_2, tel que représenté sur la figure ci-dessus et de même pour S_2 qui exerce la même action sur S_1 mais dans le sens opposé. Ces actions peuvent être représentées par leurs torseurs respectifs en un point A quelconque de l'espace.

Action de S_1 sur S_2 : $[T_{21}]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{1A} \end{cases}$; Action de S_2 sur S_1 : $[T_{12}]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_{2A} \end{cases}$

La réaction se compose d'une normale $\vec{N}$ au plan tangent *(P)* au point I et d'une composante tangentielle $\vec{T}$ située dans le plan *(P)* tel que : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

Les deux composantes satisfont aux lois de coulomb déterminées expérimentalement.

7.2. Réaction normale $\vec{N}$

La réaction normale $\vec{N}$ est toujours dirigée vers les solides auquel elle est appliquée, c'est une force répulsive. Elle ne dépend ni de la nature des surfaces en contact ni de la vitesse de glissement entre les deux solides. Elle disparaît lorsqu'il n'a plus de contact entre les solides.

7.3. Réaction tangentielle $\vec{T}$

Deux cas peuvent se présenter : - Contact entre deux solides avec glissement
- Contact entre deux solides sans glissement

a) Contact avec glissement

Quand le solide S_2 glisse sur le solide S_1, la vitesse de glissement n'est pas nulle, elle est donnée par : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1) \neq \vec{0}$

La réaction tangentielle $\vec{T}$ est colinéaire à la vitesse de glissement, mais de sens opposée. Pour une vitesse de glissement fixée, le module de la réaction tangentielle (force de frottement) est proportionnel au module de la réaction normale : $\left|\vec{T}\right| = f \left|\vec{N}\right|$

f : est le coefficient de frottement de glissement, il dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact. Ce coefficient, souvent indépendant de la vitesse de glissement, s'exprime aussi par la relation :

$$f = tg\varphi \quad , \quad \varphi \text{ : est l'angle de frottement.}$$

En réalité quand les solides glissent l'un par rapport à l'autre, on constate que le coefficient de frottement diminue légèrement. De là, on distingue deux coefficients :

f_S : coefficient de frottement statique pour $\vec{V}_g(S_2 / S_1) = \vec{0}$

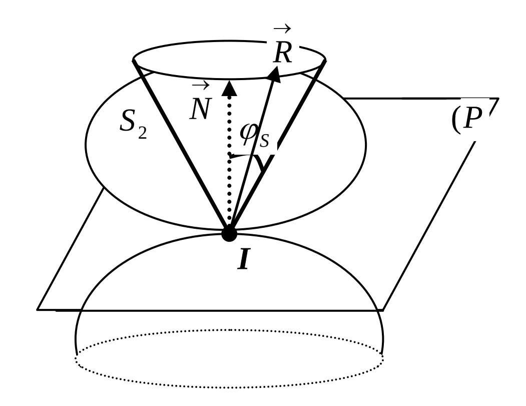
f_D : coefficient de frottement dynamique pour $\vec{V}_g(S_2 / S_1) \neq \vec{0}$

Si le mouvement se fait sans frottement : $f_D = 0$ alors $\vec{T} = \vec{0}$, alors la réaction $\vec{R}$ est normale au plan *(P)*.

b) Contact sans glissement

Le solide S_2 ne glisse pas sur le solide S_1 tant que : $\left|\vec{T}\right| \leq f \left|\vec{N}\right|$

On peut constater géométriquement qu'il n'y a pas de glissement tant que la réaction $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ est située à l'intérieur du cône de frottement statique.



c) Roulement et Pivotement

Les lois de Coulomb peuvent se généraliser aux actions de frottements de roulement et de pivotement. Le roulement se fait le long de l'axe portant la vitesse de glissement et le pivotement se fait autour de la normale au point de contact I des deux solides. Le moment résistant au pivotement au point I est noté : $\vec{M}_{Ip}$ et le moment résistant au roulement au point I est noté : $\vec{M}_{Ir}$

Dans le cas du glissement nous avons :

$$\left|\overrightarrow{M_{Ip}}\right| = \lambda_p \left|\vec{N}\right| \quad \text{et} \quad \left|\overrightarrow{M_{Ir}}\right| = \lambda_r \left|\vec{N}\right|$$

λ_p et λ_r : sont appelés coefficient de résistance au pivotement et au roulement.

Ils ont les mêmes dimensions que les longueurs et sont de valeurs très faibles devant les coefficients de frottement statique et dynamique.

7.4. Travail des actions de contact

Nous avons montré précédemment que les points de contact ont respectivement des vitesses $\vec{V}^0(I_2)$ et $\vec{V}^0(I_1)$, donc des déplacements élémentaires : $dI_{S2} = \vec{V}^0(I_2)dt$ et $dI_{S1} = \vec{V}^0(I_1)dt$

Le travail de la résultante $\vec{R}$ est donné par :

$$dW_{S2} = \vec{R}\bullet dI_{S2} = \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_2)dt$$

$$dW_{S1} = -\vec{R}\bullet dI_{S1} = -\vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_1)dt$$

Le travail total sera :

$$dW_{S1} + dW_{S1} = \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_2)dt - \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_1)dt = \vec{R}\bullet\left(\vec{V}^0(I_2)dt - \vec{V}^0(I_1)dt\right) = \vec{R}\bullet\vec{V}_g(I)$$

Or nous savons que $\vec{N} \perp \vec{V}_g(I)$ et que $\vec{T} \,//\, \vec{V}_g(I)$ alors :

$$dW = \vec{R}\bullet\vec{V}_g(I) = \left(\vec{N}+\vec{T}\right)\bullet\vec{V}_g(I) = \vec{T}\bullet\vec{V}_g(I)$$

Comme $\vec{T}$ et $\vec{V}_g(I)$ sont de sens contraires, alors le travail des actions de contact est toujours négatif : $dW = \vec{T}\bullet\vec{V}_g(I) \le 0$

C'est une énergie dissipée souvent sous forme de chaleur

Le travail peut être nul si :

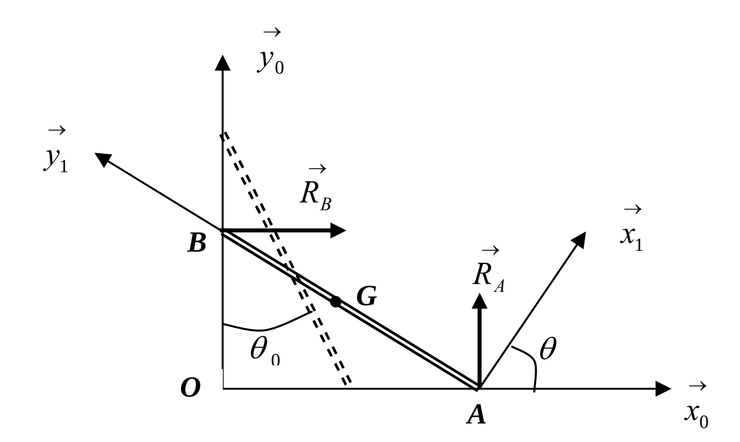
- il n'y a pas de frottement $\vec{T} = \vec{0}$;
- il n'y a pas de glissement $\vec{V}_g(I) = \vec{0}$

EXERCICES ET SOLUTIONS

Exercice 01 :

Soit une barre homogène de longueur ***AB=L***, de masse ***m***, de centre ***G*** dont l'extrémité ***A*** repose sur un sol lisse et l'extrémité ***B*** s'appuie contre mur vertical parfaitement lisse. Initialement la barre fait un angle θ_0 avec le mur. Les deux extrémités glissent, sans frottement, respectivement sur le sol et sur le mur.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir les trois équations scalaires du mouvement de la barre ;
2. En déduire, à partir de ces équations, l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ de la barre ;
3. En intégrant l'équation de l'accélération, monter que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$;
4. Retrouver l'expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale ;
5. Déterminer en fonction de θ les réactions R_A et R_B ;
6. En déduire l'angle pour lequel la barre quitte le mur.



Solution :

Mur lisse $\Rightarrow$ $\vec{R}_B = R_B\,\vec{x}_0$;Sol lisse $\Rightarrow$ $\vec{R}_A = R_A\,\vec{y}_0$

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la barre tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

1. Equations scalaires du mouvement de la barre ;

a) Théorème de la résultante dynamique :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ \frac{L}{2}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(G) = \begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ -\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

Projetons l'équation **(1)** sur les axes Ox et Oy:

$$R_B = m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_A - mg = -m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad \textbf{(3)}$$

b) Théorème du moment dynamique :

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique du système.

$$\sum_i \overrightarrow{M}(F_{ext})/_O = \vec{\delta}^0(S/R_0) \qquad \textbf{(4)} \qquad \text{avec } \vec{\delta}^0(S/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt}$$

Calculons le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^0(G) + I_G.\vec{\Omega}_1^0$

Le tenseur d'inertie de la barre dans le repère R_1 est donné par : $I_G = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{R_1}$

Le moment cinétique s'écrira :

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ \frac{L}{2}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge m \begin{cases} \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \left(-\frac{mL^2}{4}\dot{\theta} + \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\right)\vec{z}_0 = -\frac{mL^2}{6}\dot{\theta}\ \vec{z}_0$, on déduit le moment dynamique par :

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta}\ \vec{z}_0$$

Nous avons ainsi : $\overrightarrow{OB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta}\ \vec{z}_0$ cette équation vectorielle se

traduit par : $\begin{pmatrix} 0 \\ L\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L/2)\sin\theta \\ (L/2)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta} \end{pmatrix}$

$$-R_B L\cos\theta + R_A L\sin\theta - mg\frac{L}{2}\sin\theta = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta} \qquad \textbf{(5)}$$

2. Accélération angulaire $\ddot{\theta}$ de la barre

En remplaçant R_A et R_B par leurs expressions dans l'équation **(5)** , on aboutit à :

$$-\frac{mL^2}{2}\cos\theta(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) + L\sin\theta\left(mg - m\frac{L}{2}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\right) - mg\frac{L}{2}\sin\theta = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta}$$

$$-\frac{mL^2}{2}\ddot{\theta} + mg\frac{L}{2}\sin\theta = -\frac{mL^2}{6}\ddot{\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

3. Monter que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$;

En multiplie l'équation de l'accélération angulaire par $2\dot{\theta}$ on obtient :

$2\dot{\theta}\ddot{\theta} - 3\frac{g}{L}\dot{\theta}\sin\theta = 0$ en intégrant cette équation on aboutit à :

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(-\cos\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

4. Expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant le théorème de conservation de l'énergie :

L'énergie totale à l'instant initiale $t = 0$ est égale à l'énergie cinétique à un instant quelconque t : $E_0(S) = E_t(S) \quad \Leftrightarrow \quad E_{P0}(S) + E_{C0}(S) = E_{Pt}(S) + E_{Ct}(S)$

à : $t = 0 \quad V^0(G) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0(S) = E_{P0}(S) = mg\frac{L}{2}\cos\theta_0$

à : t : L'énergie potentielle est égale à : $E_{Pt}(S)) = mg\frac{L}{2}\cos\theta$

L'énergie cinétique totale est donnée par : $E_{Ct}(S) = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \frac{1}{2}I_{Gzz}(S).\left(\Omega_1^0\right)^2$

Avec : $\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2$ et $I_{Gzz} = \frac{mL^2}{12}$

$$E_{Ct}(S) = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{8}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2$$

En égalisant l'énergie totale aux deux instants, nous obtenons :

$$mg\frac{L}{2}\cos\theta_0 = mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 \quad \Leftrightarrow \quad g\cos\theta_0 = g\cos\theta + \frac{L}{3}\dot{\theta}^2$$

ce qui donne : $\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

5. Les réactions R_A et R_B en fonction de θ :

Nous avons : $\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta$ et $\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$

On remplaçant les expressions de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ dans celle de R_A et R_B on les exprime en fonction de θ :

$$R_A = mg - m\frac{L}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\sin\theta + 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\cos\theta\right)$$

$$R_A = mg - m\frac{3g}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \cos\theta_0\cos\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$R_A = mg - m\frac{3g}{2}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta_0\cos\theta - \cos^2\theta\right)$$

$$R_A = mg\left[\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cos^2\theta - \frac{3}{2}\cos\theta_0\cos\theta\right]$$

et

$$R_B = m\frac{L}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\theta\cos\theta - 3\frac{g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)\sin\theta\right)$$

$$R_B = m\frac{L}{2}\left(\frac{3g}{2L}\sin\theta\cos\theta - \frac{3g}{L}\cos\theta_0\sin\theta + \frac{3g}{L}\cos\theta\sin s\theta\right)$$

$$R_B = \frac{3}{2}mg\left(\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta - \cos\theta_0\sin\theta\right)$$

6. Angle pour lequel la barre quitte le mur

Lorsque le barre quitte le mur, la réaction en ce point sera nulle, d'où : $R_B = 0$

$$R_B = \frac{3}{2} mg\left(\frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta - \cos\theta_0 \sin\theta \right) = 0$$

$$\sin\theta\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \cos\theta_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\cos\theta = \cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = Arc\cos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right)$$

car pour $\theta = 0$ la barre est en position verticale donc la barre quitte le mur pour :

$$\theta = Arc\cos\left(\frac{2}{3}\cos\theta_0\right)$$

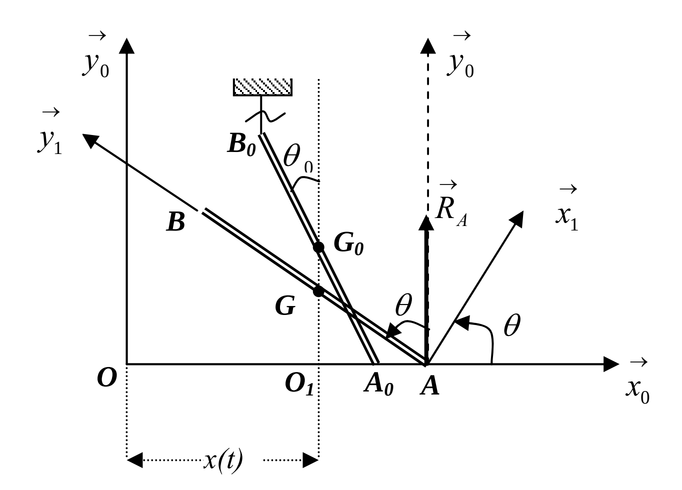
Exercice 02 :

Une barre homogène ***AB = L*** , de masse ***m*** est attachée initialement par son extrémité $\boldsymbol{B_0}$ par un fil inextensible à un bâti fixe. L'autre extrémité $\boldsymbol{A_0}$ repose sur un sol parfaitement lisse.

Soit θ_0 l'angle d'inclinaison initial de la barre avec l'axe vertical $(O_1, \vec{y}_0)$. A un instant ***t*** quelconque on coupe le fil et la barre tombe sans vitesse initiale. On considère que le mouvement se fait dans le plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Soit $R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à la barre tel que $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta$. On donne $\overrightarrow{OO_1} = x\,\vec{x}_0$ et le tenseur d'inertie de la barre en son centre d'inertie ***G*** dans le repère R_1 s'écrit : $I_{G/R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_1}$ avec $A = \dfrac{mL^2}{12}$

On prendra le repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme repère de projection.

1. Déterminer les vecteurs, position, vitesse, accélération absolue du point ***G*** ;
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au point ***G*** ; En déduire que le centre ***G*** de la barre reste en mouvement vertical lors de sa chute ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au point ***G*** ;
4. En déduire l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g .



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe et $R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1^0=\dot{\theta}\,\vec{z}_0=\dot{\theta}\,\vec{z}_1$

1. Vecteurs : position, vitesse et accélération absolue du point *G* ;

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1G}=x\,\vec{x}_0+\frac{L}{2}\cos\theta\,\vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{OG}=\underset{R_0}{\begin{cases}x\\ \frac{L}{2}\cos\theta\\ 0\end{cases}}\Rightarrow\ \vec{V}^0(G)=\underset{R_0}{\begin{cases}\dot{x}\\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta\\ 0\end{cases}}\ ;\qquad \vec{\gamma}^0(G)=\underset{R_0}{\begin{cases}\ddot{x}\\ -\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\\ 0\end{cases}}\ ;$$

2. Théorème de la résultante dynamique au point *G* ;

La résultante des forces extérieures appliquées à la barre est égale à la masse de la barre par l'accélération de son centre d'inertie. Le sol est lisse, alors la réaction au point A est suivant l'axe *(O, y)* donc normale au plan horizontal.

$$\vec{R}_A+\vec{P}=m\,\vec{\gamma}^0(G)\qquad \textbf{(1)}$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$m\ddot{x}=0\ \Leftrightarrow\ \ddot{x}=0\qquad \textbf{(2)}$$

$$R_{Ay}-P=-m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\qquad \textbf{(3)}$$

La barre tombe sans vitesse initiale alors : $\dot{x}=0\ \Rightarrow\ x=Cte$

Comme $x=Cte$ alors le centre d'inertie **G** de la barre tombe verticalement.

L'équation **(3)** s'écrit : $R_{Ay} = mg - m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$

3. Théorème du moment dynamique au point *G* ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \overrightarrow{GA} \wedge \vec{R}_A = \begin{cases} \frac{L}{2}\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ R_{Ay} \\ 0 \end{cases}_{R_0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta \end{cases}_{R_0} = \frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta\,\vec{z}_0$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point ***G*** :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \frac{mL^2}{12}\dot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

En égalisant les deux expressions on obtient : $\frac{L}{2}R_{Ay}\sin\theta = \frac{mL^2}{12}\ddot{\theta}$

$$R_{Ay} = \frac{mL}{6}\frac{\ddot{\theta}}{\sin\theta} \qquad \textbf{(5)}$$

4. Expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ en fonction de $L, \dot{\theta}, \theta$ et g.

En remplaçant l'expression de R_{Ay} dans l'équation **(3)** on déduit l'équation différentielle décrivant la chute de la barre :

$$\frac{mL}{6}\frac{\ddot{\theta}}{\sin\theta} = mg - m\frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \Rightarrow \ddot{\theta}\left(\frac{mL}{6}\frac{1}{\sin\theta} + m\frac{L}{2}\sin\theta\right) = mg - m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$\text{d'où} \quad \ddot{\theta} = 3\frac{(2g - L\dot{\theta}^2\cos\theta)}{L(1+3\sin^2\theta)}\sin\theta$$

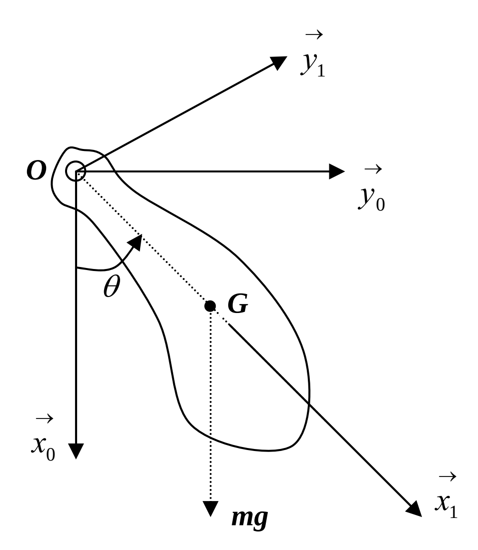
Exercice 03 :

Un pendule pesant constitué d'un solide homogène de forme quelconque, de masse ***m*** tourne autour d'un point fixe ***O*** lui appartenant. La liaison entre le solide et le bâti est de type cylindrique. Le pendule est lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ en mouvement de rotation par rapport à un repère fixe $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti tel que : $(\vec{x}_0,\vec{x}_1) = (\vec{y}_0,\vec{y}_1) = \theta$

Le tenseur d'inertie du pendule en son centre d'inertie ***G*** dans le repère R_1 est égale à : I_G

On donne $\overrightarrow{OG} = L\,\vec{x}_1$ avec ***L= Cte*** ; R_1 est le repère de projection.

1. En utilisant les théorèmes de la résultante dynamique et du moment dynamique, établir l'équation différentielle du mouvement ;
2. Retrouver l'expression de cette équation en utilisant le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale ;
3. En déduire l'équation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe

$R_1(A,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est tel que : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

Vitesse et accélération du point G :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -L\dot{\theta}^2 \\ L\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}}$$

1. Théorème de la résultante dynamique et du moment dynamique au point *G* ;

1.a. Théorème de la résultante dynamique au point *G* ;

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie. L'articulation au point O est cylindrique, la réaction a deux composantes dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$

$$\vec{R}_O + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes donne :

$$R_{Ox} + mg\cos\theta = -m\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_{Oy} - mg\sin\theta = mL\ddot{\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

1.b. Théorème du moment dynamique au point *G* ;

Le moment des forces extérieures est égal au moment dynamique de la barre.

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \qquad \textbf{(4)}$$

$$\sum_i \vec{M}(F_{ext})/G = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{R}_O = \underset{R_0}{\begin{cases} -L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \wedge \underset{R_0}{\begin{cases} R_{Ox} \\ R_{Oy} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_0}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -LR_{Oy} \end{cases}} = -LR_{Oy}\,\vec{z}_1$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique au point ***G*** :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{or nous avons : } \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_1^0 \Rightarrow \vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_G \dot{\theta}\vec{z}_1$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = I_G \ddot{\theta}\vec{z}_0$$

nous avons ainsi : $-LR_{Oy} = I_G \ddot{\theta} \Leftrightarrow R_{Oy} = -\dfrac{I_G \ddot{\theta}}{L}$ **(4)**

1.c. Equation différentielle du mouvement

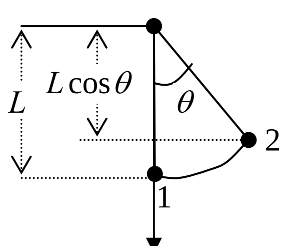
On remplace l'équation **(4)** dans l'équation **(3)**, on obtient : $-\dfrac{I_G \ddot{\theta}}{L} - mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) + mgL\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G}\sin\theta = 0$$

2. Equation différentielle en utilisant le théorème de conservation de l'énergie totale ;

L'énergie totale dans la position 1 est égale à l'énergie totale dans la position 2. : $E_1 = E_2$

$$E_1 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T} I_G.\vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I_G.\dot{\theta}^2$$



$$E_2 = mg(L - L\cos\theta) = mgL(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_G.\dot{\theta}^2 = mgL(1-\cos\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}^2\left(mL^2 + I_G\right) = 2mgL(1-\cos\theta)$$

En dérivant les deux termes on obtient : $2\ddot{\theta}\dot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) = 2mgL\dot{\theta}\sin\theta$

$$\ddot{\theta}\left(mL^2 + I_G\right) - mgL\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgL}{mL^2 + I_G}\sin\theta = 0$$

3. Equation différentielle du pendule simple ainsi que sa période.

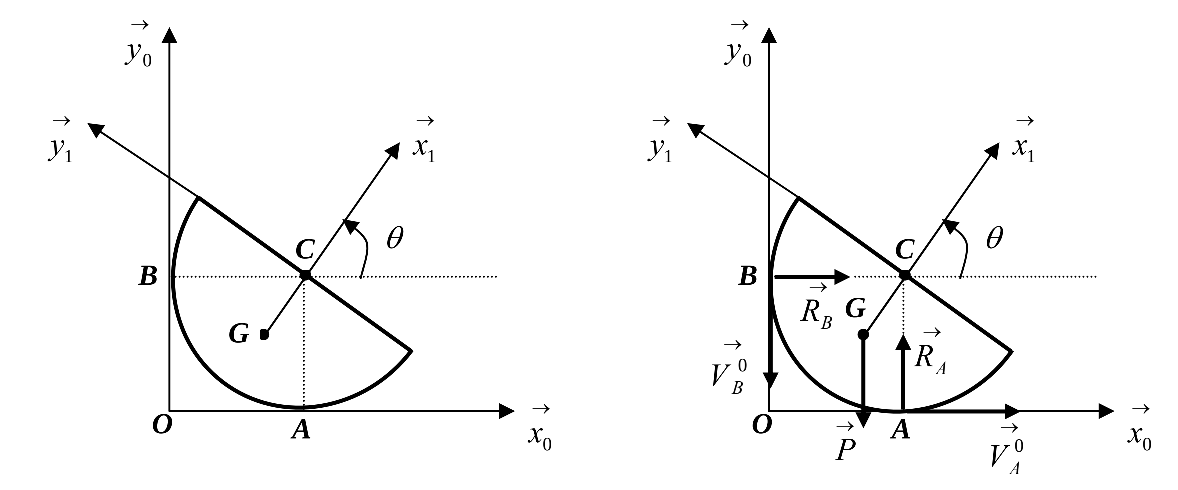
Dans le cas d'un pendule simple $I_G = 0$, et s'il a de faibles oscillations alors : $\sin\theta \approx \theta$

L'équation devient : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0 \quad \omega^2 = \dfrac{g}{L}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Exercice 04 :

Une demi sphère pleine de centre ***C***, de rayon ***R***, de masse ***M***, de centre d'inertie ***G*** est animée d'un mouvement plan par rapport au repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Elle est en contact avec le sol lisse en ***A*** et le mur lisse au point ***B***. Elle glisse sans frottement sur les deux points. Le tenseur d'inertie de la demi sphère pleine en son centre ***C*** dans le repère $R_1(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est donné par : $I_{C/R_1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}$ avec $A = \frac{2}{5}MR^2$ et ***CG = a***

1. Déterminer la vitesse et l'accélération absolue du points ***G*** dans R_0 et R_1 ;
2. Déterminer les coordonnées du centre instantané de rotation ***(CIR)*** de la demi sphère ;
3. Calculer les réactions N_A et N_B en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en utilisant le théorème de la résultante dynamique ;
4. En utilisant le théorème du moment dynamique trouver l'équation différentielle de mouvement de la demi sphère;
5. En intégrant l'équation de mouvement et en prenant les conditions : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, montrer que l'on a : $\dot{\theta}^2 = \frac{2Mga}{A}\sin\theta$;
6. Retrouver l'expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale ;
7. En déduire les expressions des réactions R_A , R_B et de l'angle limite θ_l pour lequel la demi sphère pleine quitte le mûr.



Solution :

1. Vitesse et accélération absolue du points *G* dans R_0 et R_1 ;

A partir du vecteur position du point G nous déduisons la vitesse et l'accélération :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \begin{cases} R \\ R + \\ 0 \end{cases}_{R_0} \begin{cases} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta = \\ 0 \end{cases}_{R_0} \begin{cases} R - a\cos\theta \\ R - a\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0}$, $\overrightarrow{CG} = \begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

$\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_0 = \dot{\theta}\,\vec{z}_1$

Dans le repère R_0 *:*

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \begin{cases} a\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\,a\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(G)}{dt} = \begin{cases} a\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ -a\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

Dans le repère R_1 ***:***

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\,\overrightarrow{CG}}{dt} = \frac{d^1\,\overrightarrow{CG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CG} = \begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \begin{cases} -a \\ 0 = \\ 0 \end{cases}_{R_1} \begin{cases} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\,\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\,\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \begin{cases} 0 \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1} \begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_1} \begin{cases} 0 \\ -a\dot{\theta} = \\ 0 \end{cases}_{R_1} \begin{cases} a\dot{\theta}^2 \\ -a\ddot{\theta} \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

2. Coordonnées du centre instantané de rotation *(CIR)* de la demi sphère ;

Nous pouvons le déterminer de deux façons : l'une graphique et l'autre analytique.

Méthode graphique : Les directions des vitesses des deux points ***A*** et ***B*** du solide sont connues, on trace les perpendiculaires à celles-ci au même point, leur intersection est le centre instantané de rotation. Les deux normales se rencontrent au point C, alors celui-ci est confondu avec le centre instantané de rotation $(I \equiv C)$.

Méthode analytique : La Vitesse du centre instantané de rotation est nulle : soit (x_I, y_I) les coordonnés du C.I.R. dans le repère R_0 , nous pouvons aussi écrire :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{GI} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{\theta}\,a\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} 0 \\ 0\wedge \\ \dot{\theta} \end{cases}_{R_0} \begin{cases} x_I - R + a\cos\theta \\ y_I - R + a\sin\theta = \\ 0 \end{cases}_{R_0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$a\dot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}(y_I - R + a\sin\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}(y_I - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_I = R$$

$$-\dot{\theta}\,a\cos\theta + \dot{\theta}(x_I - R + a\cos\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}(x_I - R) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_I = R$$

On voit bien que le C.I.R. est confondu avec le centre C de la demi sphère.

3. Réactions R_A et R_B en fonction de $\theta, \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par le théorème de la résultante dynamique

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_B + m\vec{g} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

Projetons l'équation **(1)** sur les axes du repère R_0

$$R_B = ma\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_A - mg = -ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \quad \Leftrightarrow \quad R_A = mg - ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \qquad \textbf{(3)}$$

4. Equation différentielle de mouvement de la demi sphère en utilisant le théorème du moment dynamique

Le moment résultant des forces extérieures est égal au moment dynamique du solide au même point ***C***.

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_{ext})/_C = \vec{\delta}_C(S/R_0) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique :

$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \dfrac{d^0\,\vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt}$, le moment cinétique au point ***C*** est donné par :

$$\vec{\sigma}_C(S/R_0) = I_{C/R_1}.\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = A\dot{\theta}\,\vec{z}_0 = A\dot{\theta}\,\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0,\,R_1}$$

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0 \vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt} = A\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$\overrightarrow{CA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{R}_B + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$ comme : $\overrightarrow{CA} // \vec{R}_A$ et $\overrightarrow{CB} // \vec{R}_B$ alors :

$$\overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0) \Leftrightarrow \; _{R_0}\begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \; _{R_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \; _{R_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$ d'où : $mga\cos\theta = A\ddot{\theta}$

ce qui donne : $\ddot{\theta} = \frac{mga}{A}\cos\theta$ **(4)**

5. Equation de mouvement avec les conditions : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$;

On multiplie l'équation (4) par : $\dot{\theta}$, puis on intègre

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{mga}{A}\dot{\theta}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}d(\sin\theta)$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}\int_0^{\theta} d(\sin\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{mga}{A}\sin\theta$$ on déduit alors :

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{mga}{A}\sin\theta \qquad \textbf{(5)}$$

6. Expression de $\dot{\theta}^2$ en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale :

$$E_C + E_P = E_{C0} + E_{P0} = Cte \quad \Rightarrow \quad E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0})$$

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^0 . I_{C/R_1} . \vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \quad ; \quad E_{C0} = 0$$

$$-(E_P - E_{P0}) = \int_0^{\theta} m\vec{g} \bullet d\,\overrightarrow{OG} = m\int_0^{\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a\sin\theta d\theta \\ -a\cos\theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^{\theta} mga\cos\theta d\theta = mga\sin\theta$$

$$E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 2\frac{mga}{A}\sin\theta$$

On retrouve ainsi l'expression de $\dot{\theta}^2$.

7. Expressions des réactions N_A , N_B et de l'angle limite θ_l pour lequel la demi sphère pleine quitte le mur.

Il suffit de remplacer les expression de $\dot{\theta}$ et de $\ddot{\theta}$ dans celles de R_A et R_B :

$$R_B = ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\sin\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\cos\theta\right) = 3\frac{m^2ga^2}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$R_A = mg - ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\cos\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\sin\theta\right) = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$R_A = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\cos 2\theta$$

La demi sphère quitte le mur si : $R_B = 0 \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases}\theta = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 05 :

Une barre homogène de longueur ***AB = 2L***, de centre G et de masse m, glisse sans frottement le long d'un escalier tel que représenté sur la figure. Le point ***A*** glisse sur le sol et le point ***C*** sur l'arrête de l'escalier. La position initiale de la barre étant A_0B_0.

On prendra R_0 comme repère de projection.

On donne : $OA = x(t)$, $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

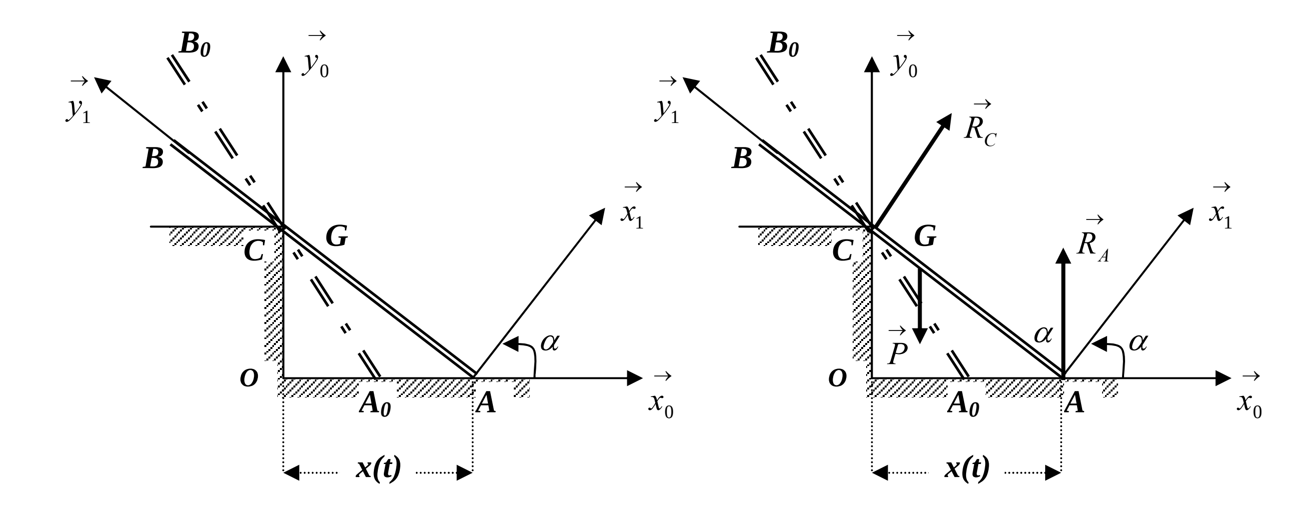
1. Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{OG}$, $\vec{V}^0(G)$ et $\vec{\gamma}^0(G)$;

2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique à la barre ;

3. Appliquer le théorème du moment dynamique à la barre au point ***G*** ;

4. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la barre.

Le tenseur d'inertie de la barre en ***G*** dans R_1 est donné par : $I_{G/R1} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe ;

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que : $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$

1. Vecteurs : $\overrightarrow{OG}$, $\vec{V}^0(G)$ et $\vec{\gamma}^0(G)$;

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \left\{\begin{array}{l} x \\ 0+ \\ 0 \end{array}\right._{R_0} \left\{\begin{array}{l} -L\sin\alpha \\ L\cos\varepsilon \\ 0 \end{array}\right._{R_0} = \left\{\begin{array}{l} x - L\sin\alpha \\ L\cos\varepsilon \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \left\{\begin{array}{l} \dot{x} - L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \end{array}\right._{R_0} \quad ; \; \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} - L\left(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) \\ -L\left(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha\right) \\ 0 \end{array}\right._{R_0}$$

2. Théorème de la résultante dynamique, appliqué à la barre

La résultante des forces extérieures appliquées à la barre est égale à la masse de la barre par l'accélération de son centre de gravité :

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

La projection de l'équation (1) sur les axes de R_0 donne :

$$R_C\cos\alpha = m\ddot{x} - mL\left(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$R_A + R_C\sin\alpha - mg = -mL\left(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha\right) \qquad \textbf{(3)}$$

3. Théorème du moment dynamique, appliqué à la barre au point *G* ;

Le moment résultant des forces extérieures appliquées à la barre est égal au moment dynamique de la barre au même point ***G***.

$$\sum_i \overrightarrow{M}(\vec{F}_{ext})/_G = \vec{\delta}_G(S/R_0) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA}\wedge\vec{R}_A + \overrightarrow{GC}\wedge\vec{R}_C = \vec{\delta}_G(S/R_0) \qquad \textbf{(4)}$$

Or le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} \quad \text{avec :}$$

$$\vec{\sigma}_G(S/R_0) = I_{G/R_1}.\vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 = \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \frac{d^0\,\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt} = \frac{mL^2}{3}\ddot{\alpha}\,\vec{z}_0 \qquad \textbf{(5)}$$

Pour calculer le moment des forces extérieures on doit déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GA}$:

Nous avons : $\sin\alpha = \frac{x}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{x}{\sin\alpha}$ donc : $GC = AC - AG = \left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)$

on obtient : $\overrightarrow{GC} = \begin{cases} -\left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)\sin\alpha \\ \left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0}$ et $\overrightarrow{GA} = \begin{cases} L\sin\alpha \\ -L\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0}$;

$$\sum_i \overrightarrow{M}(\vec{F}_{ext})/_G = \begin{cases} L\sin\alpha \\ -L\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} 0 \\ R_A \\ 0 \end{cases}_{R_0} + \begin{cases} -\left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)\sin\alpha \\ \left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)\cos\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0} \wedge \begin{cases} R_C\cos\alpha \\ R_C\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M}(\vec{F}_{ext})/_G = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ LR_A\sin\alpha - R_C\left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right) \end{cases}_{R_0} = \left(LR_A\sin\alpha - R_C\left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right)\right)\vec{z}_0 \qquad \textbf{(6)}$$

L'égalité des moments dans les équations **(5)** et **(6)** donne :

$$LR_A\sin\alpha - R_C\left(\frac{x}{\sin\alpha} - L\right) = \frac{mL^2}{3}\ddot{\alpha} \qquad \textbf{(7)}$$

4. Théorème de l'énergie cinétique, appliqué à la barre.

La variation de l'énergie cinétique de la barre est égale au travail des forces extérieures.

$$dE_C = dW \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dE_C}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

L'énergie cinétique de la barre est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T}.I_{G/R_1}.\vec{\Omega}_1^0$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\alpha}^2 - 2L\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(0,0,\dot{\alpha}\right)\begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

$$E_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\alpha}^2 - 2L\dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}^2$$

$$\frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\ddot{x} + 2L^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - 2L\left(\ddot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{x}\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{x}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}^2$$

Nous avons aussi :

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G) + \vec{R}_A\bullet\vec{V}^0(A) + \vec{R}_C\bullet\vec{V}^0(C),$$

mais : $\vec{R}_A\bullet\vec{V}^0(A) = \vec{0}$ car $\vec{R}_A \perp \vec{V}^0(A)$ et $\vec{R}_C\bullet\vec{V}^0(C) = \vec{0}$ car $\vec{R}_C \perp \vec{V}^0(C)$

$$\frac{dW}{dt} = m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G) = \begin{cases} 0 \\ -mg \\ 0 \end{cases}_{R_0} \bullet \begin{cases} \dot{x} - L\dot{\alpha}\cos\alpha \\ -L\dot{\alpha}\sin\alpha \\ 0 \end{cases}_{R_0} = mgL\dot{\alpha}\sin\alpha$$

L'égalité entre les deux termes donne :

$$\frac{1}{2}m\left(2\dot{x}\ddot{x} + 2L^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - 2L\left(\ddot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{x}\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{x}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}^2 = mgL\dot{\alpha}\sin\alpha$$

$$\dot{x}\ddot{x} + L^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} - L\left(\ddot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + \dot{x}\ddot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{x}\dot{\alpha}^2\sin\alpha\right) + \frac{L^2}{6}\dot{\alpha}^2 = gL\dot{\alpha}\sin\alpha$$

Exercice 06 :

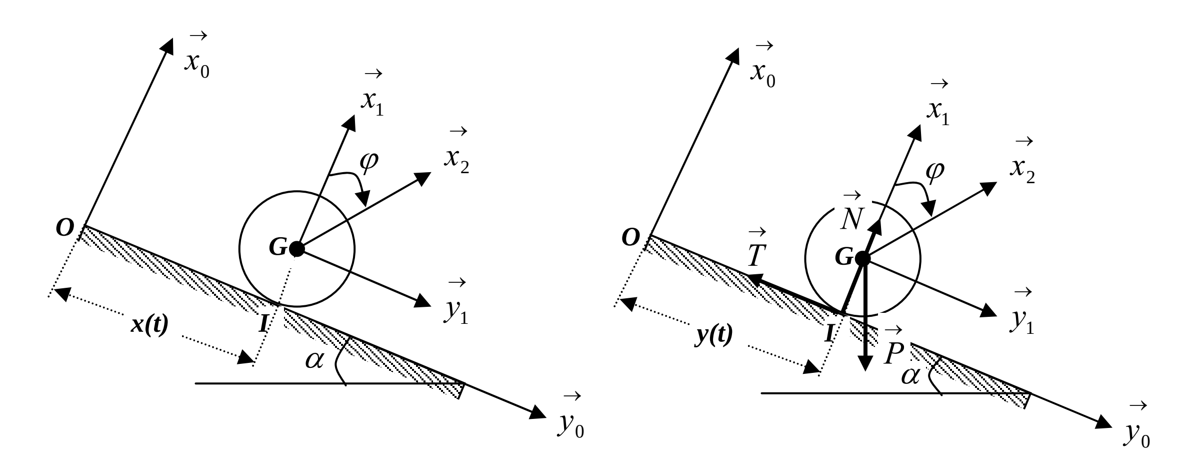
Un disque plein de rayon a , de masse m roule sans glisser sous l'effet de la gravitation sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soit $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ un repère fixe lié au plan incliné, $R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ lié au centre d'inertie G du disque et $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à l'axe $\vec{z}_1 \equiv \vec{z}_2$ tel que $(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=\varphi$.

A l'instant initial, le disque est immobile. La réaction au point de contact entre le disque et le plan incliné a deux composantes, l'une $\vec{N}$ normale au plan incliné, l'autre $\vec{T}$ tangentielle à ce dernier.

Le tenseur d'inertie du disque en son centre d'inertie G dans le repère R_2 est donné par :

$$I_{C/R_2}=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2A \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A=\frac{Ma^2}{4}$$; *On prendra R_1 comme repère de projection.*

1. Déterminer la vitesse $\vec{V}^0(G)$ et l'accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ du point G ;
2. Appliquer le théorème de la résultante dynamique au disque ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au disque ;
4. Trouver une équation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{y},\dot{\theta}$ *et* a et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné ;
5. En déduire les expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α et a ;
6. Déterminer l'énergie cinétique du disque en fonction de m, a , $\dot{y}$ *et* $\dot{\varphi}$;
7. Exprimer l'énergie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;
8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque, retrouver l'expression de l'accélération linéaire $\ddot{y}$.



Solution :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe.

$R_1(G, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en translation par rapport à $R_0 \Rightarrow \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$

$R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est tel que : $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \varphi$ et $\vec{\Omega}_2^1 = \dot{\varphi}\vec{z}_1 = \dot{\varphi}\vec{z}_0$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ y \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} a \\ 0 \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} a \\ y \\ 0 \end{cases}}$$

1. Vitesse $\vec{V}^0(G)$ et accélération $\vec{\gamma}^0(G)$ du point G ;

Par dérivation :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^1\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ \dot{y} \\ 0 \end{cases}} \quad ; \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ \ddot{y} \\ 0 \end{cases}} \quad ; \text{car } \vec{\Omega}_1^0 = \vec{0}$$

2. Théorème de la résultante dynamique appliqué au disque

La résultante des forces extérieures appliquées au disque est égale à la masse du disque par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}^0(G) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{\gamma}^0(G) \qquad \textbf{(1)}$$

La projection de cette équation sur les axes du repère R_1 donne deux équations scalaires :

$$N - mg\cos\alpha = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$-T + mg\sin\alpha = m\ddot{y} \qquad \textbf{(4)}$$

3. Théorème du moment dynamique appliqué au disque

Le moment résultant des forces extérieures appliquées au disque est égale au moment dynamique du disque au même point ***G*** .

$\sum_i \vec{M}(\vec{F}_{ext})/_G = \vec{\delta}^0(G) \Leftrightarrow \overrightarrow{GI}\wedge\vec{T}+\overrightarrow{GI}\wedge\vec{N}=\vec{\delta}^0(G)$ comme $\overrightarrow{GI}$ // $\vec{N}$ elle devient :

$$\overrightarrow{GI}\wedge\vec{T}=\vec{\delta}^0(G) \qquad \textbf{(4)}$$

Exprimons chacun des termes de cette équation : $\overrightarrow{GI}\wedge\vec{T}= {}_{R_1}\begin{cases}-a\\0\\0\end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases}0\\-T\\0\end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases}0\\0\\aT\end{cases} = aT\,\vec{z}_1$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique, d'où : $\vec{\delta}^0(G)=\dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(G)}{dt}$

Le moment cinétique du disque est donné par : $\vec{\sigma}^0(G)=I_{C/R_2}.\vec{\Omega}_2^0$

$$\vec{\sigma}^0(G)= {}_{R_1}\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\varphi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\A\dot{\varphi}\end{pmatrix}=A\dot{\varphi}\,\vec{z}_1=A\dot{\varphi}\,\vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}^0(G)=\frac{d^0\vec{\sigma}^0(G)}{dt}=\frac{d^1\vec{\sigma}^0(G)}{dt}=A\ddot{\varphi}\,\vec{z}_1=\frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi}\,\vec{z}_1 \qquad \text{car } \vec{\Omega}_1^0=\vec{0}$$

En égalisant les deux expressions des moments nous obtenons :

$$aT=\frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad T=\frac{ma}{2}\ddot{\varphi} \qquad \textbf{(5)}$$

4. Equation scalaire liant les paramètres cinématiques $\dot{x},\dot{\theta}$ et a et qui traduisent la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné :

La condition de roulement sans glissement est vérifiée si la vitesse du point de contact du disque et du plan incliné est nulle : $\vec{V}_g(I)=\vec{V}_s^0(I)-\vec{V}_P^0(I)=\vec{0}$

Or : $\vec{V}_P^0(I)=\vec{0}$ alors : $\vec{V}_s^0(I)=\vec{V}^0(G)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{GI}=\vec{0}$

$${}_{R_1}\begin{cases}0\\\dot{y}\\0\end{cases} + {}_{R_1}\begin{cases}0\\0\\\dot{\varphi}\end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases}-a\\0\\0\end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases}0\\0\\0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y}-a\dot{\varphi}=0 \qquad \textbf{(6)}$$

5. Expressions de N, T, $\ddot{y}$ et $\ddot{\varphi}$ en fonction de m, g, α et a ;

L'équation **(3)** donne : $\underline{N = mg\cos\alpha}$

L'équation **(6)** $\ddot{y} = a\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{y}}{a}$ l'équation **(4)** devient : $-\frac{ma}{2}\frac{\ddot{y}}{a} + mg\sin\alpha = m\ddot{y}$

On déduit : $\underline{\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha}$ d'où : $\underline{\ddot{\varphi} = \frac{2}{3a}g\sin\alpha}$

L'équation **(5)** donne : $\underline{T = \frac{mg}{3}\sin\alpha}$

6. Energie cinétique du disque en fonction de m, a, $\dot{y}$ et $\dot{\varphi}$;

L'énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique de translation + l'énergie cinétique de rotation : $E_C = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0\,T}.I_G(S/R_2).\vec{\Omega}_1^0$

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(0,0,\dot{\varphi}\right)\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2$$

7. Energie cinétique du disque en fonction de m et $\dot{y}$ en tenant compte de la condition de roulement sans glissement ;

Nous avons dans l'équation **(6)** qui exprime le roulement sans glissement : $\dot{y} = a\dot{\varphi}$ on déduit que : $\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}}{a}$ alors l'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\frac{\dot{y}^2}{a^2} = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \qquad \underline{E_C = \frac{3}{4}m\dot{y}^2}$$

8. Expression de l'accélération linéaire $\ddot{y}$ En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au disque

La variation de l'énergie cinétique est égale au travail des forces extérieures : $\frac{dE_C}{dt} = \frac{dW}{dt}$

$$E_C = \frac{3}{4}m\dot{y}^2 \Rightarrow \frac{dE_C}{dt} = \frac{3}{2}m\dot{y}\ddot{y}$$

$$\frac{dW}{dt}=\frac{dW(\vec{T})}{dt}+\frac{dW(\vec{N})}{dt}+\frac{dW(\vec{P})}{dt}=\vec{T}\bullet\frac{d\,\overrightarrow{OI}}{dt}+\vec{N}\bullet\frac{d\,\overrightarrow{OI}}{dt}+m\vec{g}\bullet\frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt}=m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G)$$

$$\frac{dW}{dt}=\vec{T}\bullet\vec{V}^0(I)+\vec{N}\bullet\vec{V}^0(I)+m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G)=m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G)\quad \text{car}\quad \vec{V}^0(I)=\vec{0}$$

$$\frac{dW}{dt}=m\vec{g}\bullet\vec{V}^0(G)=\underset{R_1}{\begin{pmatrix}-mg\cos\alpha\\ mg\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}}\bullet\underset{R_1}{\begin{pmatrix}0\\ \dot{y}\\ 0\end{pmatrix}}=mg\,\dot{y}\sin\alpha$$

L'égalité des deux expressions donne :

$$\frac{3}{2}m\,\dot{y}\,\ddot{y}=mg\,\dot{y}\sin\alpha \qquad\Leftrightarrow\qquad \underline{\ddot{y}=\frac{2}{3}g\sin\alpha}$$

Exercice 07 :

Le concasseur d'un moulin à huile est constitué d'une roue homogène ***(S)*** de masse ***m***, de rayon ***R***, de centre de masse ***G*** . La roue a une liaison pivot au point ***G*** avec une tige horizontale de masse négligeable ***O₁G*** , soudée à un arbre vertical ***OA*** en rotation à une vitesse angulaire constante : $\dot{\psi}=Cte$. L'arbre ***OA*** est maintenu vertical par deux liaisons, l'une sphérique en ***O*** et l'autre cylindrique en ***A***. On suppose que toutes les liaisons sont sans frottement.

La roue roule sans glissement sur le plan horizontal fixe lié au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

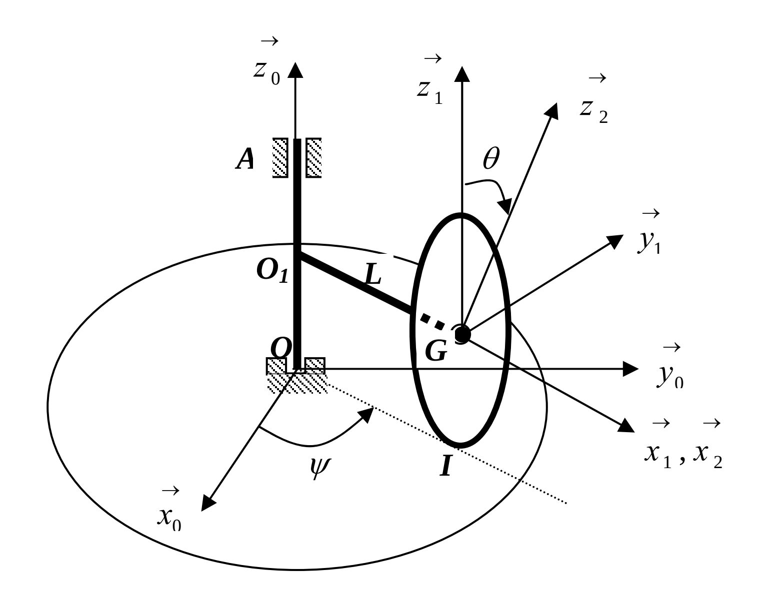
Le repère $R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est lié à la tige $\boldsymbol{O_1G}$; le repère $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est lié à la roue.

Le tenseur d'inertie de la roue en son centre d'inertie G dans le repère R_2 est donné par :

$$I_{G/R_1}=\begin{bmatrix}2A & 0 & 0\\ 0 & A & 0\\ 0 & 0 & A\end{bmatrix}_{R_1,R_2}\qquad \text{avec : } A=\frac{mR^2}{4}$$

1. En appliquant la condition de roulement sans glissement au point ***I***, exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\psi}$;
2. Déterminer le moment dynamique au point $\boldsymbol{O_1}$ de la roue ;
3. Appliquer le théorème du moment dynamique au point $\boldsymbol{O_1}$ à la roue ;

4. Exprimer l'action du plan sur la roue en fonction de ***m, R*** et $\dot{\psi}$;
5. Exprimer le couple gyroscopique agissant sur la roue dans le repère R_1.



Solution :

$R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère fixe.

$R_1(G,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ est tel que : $(\vec{x}_1,\vec{x}_0)=(\vec{y}_1,\vec{y}_0)=\psi \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_1^0=\dot{\psi}\,\vec{z}_1=\dot{\psi}\,\vec{z}_1$

$R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ est tel que : $(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{\Omega}_2^1=-\dot{\theta}\,\vec{x}_1=-\dot{\theta}\,\vec{x}_2$

$$\vec{\Omega}_2^0=\dot{\psi}\,\vec{z}_1-\dot{\theta}\,\vec{x}_2=\underset{R_1}{\begin{cases}-\dot{\theta}\\ 0\\ \dot{\psi}\end{cases}} \; ; \quad \vec{GI}=-R\,\vec{z}_1=\underset{R_1}{\begin{cases}0\\ 0\\ -R\end{cases}} \; ; \quad \vec{OG}=L\,\vec{x}_1+R\,\vec{z}_1=\underset{R_1}{\begin{cases}L\\ 0\\ R\end{cases}}$$

$$\vec{V}^0(G)=\vec{V}^0(O)+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{OG}=\underset{R_1}{\begin{cases}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{cases}}\wedge\underset{R_1}{\begin{cases}L\\ 0\\ R\end{cases}}=\underset{R_1}{\begin{cases}0\\ L\dot{\psi}\\ 0\end{cases}} \quad \text{avec : } \vec{V}^0(O)=\vec{0}$$

1. Expression de $\dot{\theta}$ en fonction de $\dot{\psi}$;

La condition de roulement sans glissement au point de contact entre la roue et le sol signifie que la vitesse de glissement de ce point de contact est nulle :

$$\vec{V}_g(I)=\vec{V}^0(I\in S)-\vec{V}^0(I\in R_0)=\vec{0} \quad \text{or nous avons : } \vec{V}^0(I\in R_0)=\vec{0}$$

alors : $\vec{V}^0(I\in S) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(I\in S)=\vec{V}^0(G)+\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{GI}=\vec{0}$

$$\left\{\begin{array}{l}0\\ L\dot{\psi}+\\ 0\end{array}\right._{R_1}\left\{\begin{array}{l}-\dot{\theta}\\ 0\\ \dot{\psi}\end{array}\right._{R_1}\wedge\left\{\begin{array}{l}0\\ 0\\ -R\end{array}\right._{R_1}=\left\{\begin{array}{l}0\\ 0\\ 0\end{array}\right._{R_1}\Leftrightarrow L\dot{\psi}-R\dot{\theta}=0\Rightarrow\dot{\theta}=\frac{L}{R}\dot{\psi}\qquad \textbf{(1)}$$

2. Moment dynamique au point O_1 de la roue :

L'arbre étant de masse négligeable, le moment dynamique du système se réduit au moment dynamique de la roue. Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique,

d'où : $\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0)=\dfrac{d^0\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt}$

Le moment cinétique de la roue est donné par : $\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)=I_{O_1/R_2}.\vec{\Omega}_1^0+\overrightarrow{O_1G}\wedge m\vec{V}^0(G)$

$$\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)=\begin{bmatrix}2A&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}_{R_1}\begin{pmatrix}-\dot{\theta}\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L\\0\\0\end{pmatrix}\wedge m\begin{pmatrix}0\\L\dot{\psi}\\0\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}-2A\dot{\theta}\\0\\(A+mL^2)\dot{\psi}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0)=\frac{d^0\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt}=\frac{d^1\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{\sigma}^0(G)\ ;$$

$\dfrac{d^1\vec{\sigma}_{O_1}(S/R_0)}{dt}=\vec{0}$, car $\dot{\psi}$ *et* $\dot{\theta}$ sont constantes, on obtient alors :

$$\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2A\dot{\theta}\\0\\(A+mL^2)\dot{\psi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2A\dot{\theta}\dot{\psi}\\0\end{pmatrix}=-2A\dot{\theta}\dot{\psi}\ \vec{y}_1\qquad \textbf{(2)}$$

3. Théorème du moment dynamique au point O_1 à la roue ;

Le moment résultant des forces extérieures appliquées à la roue est égal au moment dynamique de la roue au même point O_1.

$$\sum_i\vec{M}(\vec{F}_{ext})/_{O_1}=\vec{\delta}_{O_1}(S/R_0)\Leftrightarrow\overrightarrow{O_1G}\wedge m\vec{g}+\overrightarrow{O_1I}\wedge\vec{R}_I=-2A\dot{\theta}\dot{\psi}\ \vec{y}_1$$

$$\underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ 0 \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -mg \end{cases}} + \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ -R \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ R_I \end{cases}} = (mg - R_I)L\ \vec{y}_1 \qquad \textbf{(3)}$$

L'égalité des expressions donne : $(mg - R_I)L = -2A\dot{\theta}\dot{\psi}$ **(4)**

4. Action du plan sur la roue en fonction de *m, R* et $\dot{\psi}$;

A partir de l'équation **(4)** on déduit :

$(mg - R_I)L = -2A\dot{\theta}\dot{\psi} \quad \Rightarrow \quad R_I = mg + \dfrac{2A}{L}\dot{\theta}\dot{\psi}$ or nous avons d'après l'équation **(1)**

$\dot{\theta} = \dfrac{L}{R}\dot{\psi}$ et $A = \dfrac{mR^2}{4}$ d'où : $R_I = mg + \dfrac{2}{L}.\dfrac{mR^2}{4}.\dfrac{L}{R}\dot{\psi}.\dot{\psi}$ on aboutit à : $R_I = mg + \dfrac{mR}{2}.\dot{\psi}^2$

5. Couple gyroscopique agissant sur la roue dans le repère R_1.

Dans le cas de ce mouvement composé de deux rotations, la rotation propre de la roue se fait autour de l'axe $(O_1, \vec{x}_1)$ à la vitesse de rotation : $\vec{\Omega}_2^1 = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1$ et la précession se fait autour de l'axe $(O, \vec{z}_0)//(O_1, \vec{z}_1)$ à la vitesse de rotation : $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_1$.

Le moment gyroscopique est donné par la relation :

$$\vec{M}_{gyros} = I_{axe\ de\ rotation\ propre}\ \vec{\Omega}_{propre} \wedge \vec{\Omega}_{précession} = I_{x_1x_1}\ \vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{\Omega}_1^0 = 2A.\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge_{R_1} . \begin{cases} -\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{cases} = 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\ \vec{y}_1$$

$$\vec{M}_{gyros} = 2A\dot{\theta}\dot{\psi}\ \vec{y}_1$$

CHAPITRE X

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

DYNAMIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE

1. Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

C'est le mouvement le plus important dans la mécanique. Le fonctionnement de toutes les machines est basé sur un mouvement de rotation autour d'un axe : rotors, machines tournantes, vilebrequins, roues etc…

Ce mouvement de rotation génère des vibrations mécaniques au niveau des paliers de fixation, si l'axe de rotation n'est pas équilibré. Les paliers sont des liaisons rotoïdes (articulations cylindriques) entre le solide et le bâti fixe. Ces vibrations sont à l'origine de l'usure des paliers, provoquée par les contraintes mécaniques dues à la liaison entre l'axe de rotation et le palier.

Pour éviter ces inconvénients, il est nécessaire d'étudier et de trouver les conditions d'équilibrage du système afin que les contraintes soient minimales et allonger la durée de vie des paliers.

2. Equations du mouvement

2.1 Paramétrage du mouvement

On choisit un repère fixe orthonormé direct $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ lié au bâti tel que l'axe vertical $\overrightarrow{Oz_0}$, soit confondu avec l'axe de rotation (Δ). Soit $R_s(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ un repère lié au solide *(S)*, tel que $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_s$. Le solide est en mouvement de rotation autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_s$ avec une vitesse : $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_s$ tel que le centre d'inertie du solide soit dans le plan $(Ox_s z_s)$,

avec : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{z}_s = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{z}_0$

L'orientation du solide *(S)* lié au repère $R_s(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ est définie par l'angle :

$\psi = (\vec{x}_0,\vec{x}_s) = (\vec{y}_0,\vec{y}_s)$

La matrice de passage du repère R_s vers le repère R_0 est donnée par :

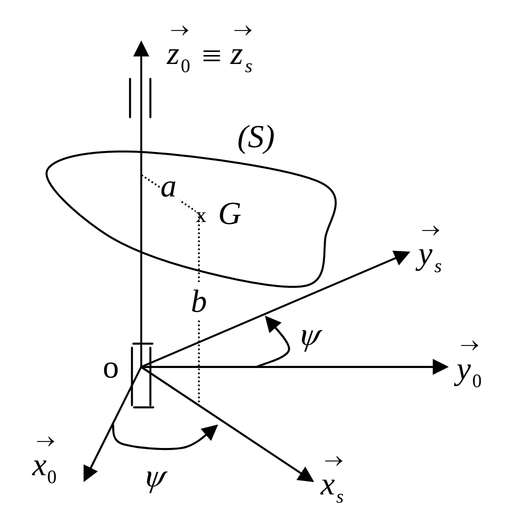
$\vec{x}_s = \cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0$

$\vec{y}_s = -\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0$

$\vec{z}_s = \vec{z}_0$

a : distance du centre d'inertie G à l'axe (Δ)

b : distance de G au plan (Ox_0y_0)



2.2 Torseur cinématique

Le torseur cinématique du solide $[C]_0$ relatif au mouvement de rotation du solide par rapport au repère R_0 est défini par ces éléments de réduction :

La résultante cinématique : $\vec{R} = \vec{\Omega}_s^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$

Le moment au point O : $\vec{M}_0 = \vec{V}^0(O) = \vec{0}$

2.3 Vecteurs vitesse et accélération du point G, centre de masse du solide

Sa position est définie précédemment par : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{z}_s$

Sa vitesse peut être déterminée dans le repère R_s de deux manières :

- par dérivation :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^s\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = a\dot{\psi}\,\vec{y}_s$$

- par composition des vitesses :

$$\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = a\dot{\psi}\,\vec{y}_s$$

Dans le repère R_0 , la vitesse aura pour expression : $\vec{V}^0(G) = -a\dot{\psi}\sin\psi\,\vec{x}_0 + a\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{y}_0$

Le vecteur accélération de G s'obtient aisément en dérivant l'expression de la vitesse.

Dans le repère R_s : $\vec{\gamma}^0(G) = \dfrac{d^0 \vec{V}^0(G)}{dt} = -a\dot{\psi}^2 \vec{x}_s + a\ddot{\psi}\,\vec{y}_s$

Dans le repère R_0 : $\vec{\gamma}^0(G) = -a\dot{\psi}^2(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi)\,\vec{y}_0 + a\ddot{\psi}(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi)\,\vec{y}_0$

$$\vec{\gamma}^0(G) = -a(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi)\,\vec{x}_0 + a(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi)\,\vec{y}_0$$

Elle peut aussi être obtenue en dérivant l'expression du vecteur vitesse, dans le repère R_0.

3. Etude cinétique

Ces éléments cinématiques nous permettent de déterminer les torseurs cinétiques et dynamiques. Afin de simplifier le problème nous choisirons de déterminer les moments cinétiques et dynamiques au point O appartenant à l'axe de rotation.

3.1 Torseur cinétique

Le solide *(S)* étant quelconque, sa matrice d'inertie en O dans le repère lié au solide s'écrira :

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s}$$

Les éléments de réduction du torseur cinétique au point O s'écriront dans R_s :

La résultante cinétique : $\vec{P} = m\vec{V}^0(G) = ma\dot{\psi}\,\vec{y}_s$

Le moment cinétique au point O : $\vec{\sigma}_o(S) = m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^0(O) + I_0(S)\vec{\Omega}_s^0$

Comme la vitesse du point O, est nulle alors le moment cinétique aura pour expression :

$$\vec{\sigma}_o(S) = I_0(S)\vec{\Omega}_s^0 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{R_s} = -E\dot{\psi}\,\vec{i}_s - D\dot{\psi}\,\vec{j}_s + C\dot{\psi}\,\vec{z}_s$$

3.2 Torseur dynamique

Les éléments de réduction du torseur dynamique au point O s'écriront dans R_s :

La résultante dynamique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G) = -ma\dot{\psi}^2\,\vec{x}_s + ma\ddot{\psi}\,\vec{y}_s$

Le moment cinétique au point O : $\vec{\delta}_o(S) = \dfrac{d^o\,\vec{\sigma}_o(S)}{dt}$

$$\vec{\delta}_o(S) = \frac{d^s(I_0(S)\vec{\Omega}_s^0)}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge I_0(S)\vec{\Omega}_s^0 = I_0(S)\dot{\vec{\Omega}}_s^0 + \vec{\Omega}_s^0 \wedge I_0(S)\vec{\Omega}_s^0$$

$$\vec{\delta}_o(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}_{R_s} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\vec{\delta}_o(S) = (-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\vec{i}_s - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\vec{j}_s + C\ddot{\psi}\vec{z}_s$$

le moment dynamique peut être exprimé dans la base R_0 en utilisant la matrice de passage.

$$\vec{\delta}_o(S) = \left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\cos\psi + (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\sin\psi\right]\vec{i}_0$$

$$+\left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\sin\psi - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]\vec{j}_0 + C\ddot{\psi}\vec{z}_0$$

3.3 Energie cinétique

Comme le solide a un mouvement de rotation pur autour d'un axe (Δ) confondu avec l'axe $\vec{z}_s \equiv \vec{z}_0$, son énergie cinétique est donnée par :

$$E_c^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\Omega}_s^0 \\ \vec{V}^0(O) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{V}^0(G) \\ \vec{\sigma}_0(S) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_s^0\,\vec{\sigma}_0(S) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_s^{0^T}\, I_0(S)\vec{\Omega}_s^0$$

$$E_c^0 = \frac{1}{2}\dot{\psi}\,\vec{z}_s^T\, I_0(S)\dot{\psi}\,\vec{z}_s = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\,\vec{z}_s^T\, I_0(S)\vec{z}_s = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2\, I_{zz}(S)$$

$$E_c^0 = \frac{1}{2}C\dot{\psi}^2$$

4. Les différentes actions mécaniques exercées sur le solide

Le solide est soumis à l'action de pesanteur due à son propre poids, aux actions de liaisons au niveau des articulations qui sont intermédiaire entre le bâti fixe et le solide, mais aussi à une action motrice où de freinage qui permet de mettre le solide en mouvement ou de le freiner s'il est déjà en mouvement.

4.1 Action de pesanteur

Au point G centre d'inertie du solide, l'action de pesanteur est représentée par le torseur ayant pour éléments de réduction : $\begin{cases} \vec{R}_p = -mg\,\vec{z}_s \\ \vec{M}_G = \vec{0} \end{cases}$

Par la formule de transport nous pouvons exprimer le moment au point *O*, il est donné par :

$$\vec{M}_O = \vec{M}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}_p = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{R}_p = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = mga\,\vec{y}_s$$

Dans le repère R_0 , il s'écrira : $\vec{M}_O = -mga \sin\psi\, \vec{x}_0 + mga\cos\psi\, \vec{y}_0$

4.2 Action due à la liaison rotoïde entre le bâti fixe et le solide

L'action de liaison entre le solide et le bâti est représentée par un torseur dont les éléments de réduction sont : $\begin{cases} \vec{R}_L = R_{Lx}\,\vec{x}_0 + R_{Ly}\,\vec{y}_0 + R_{Lz}\,\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M}_{LO} = M_{Lx}\,\vec{x}_0 + M_{Ly}\,\vec{y}_0 + M_{Lz}\,\vec{z}_0 \end{cases}$

Les composantes de l'action de liaison sont déterminées à partir des équations finales qui égalisent le moment dynamique au moment des actions extérieures. La nature de l'articulation et le point de calcul du moment peuvent réduire le nombre d'inconnues dans les équations du mouvement.

4.3 Action due au couple moteur ou au couple de freinage

Le solide peut être mis ou maintenu en mouvement de rotation à l'aide d'un couple moteur. Si le solide est déjà en mouvement, pour l'arrêter, il faut aussi appliquer un couple de freinage. Le moment appliqué pour mettre le solide en rotation ou pour l'arrêter est toujours porté par l'axe de rotation.

Dans ce cas, le couple moteur ou le couple de freinage sera représenté par un torseur dont les éléments de réduction sont : $\begin{cases} \vec{R}_m = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \Gamma_m\,\vec{z}_s = \Gamma_m\,\vec{z}_0 \end{cases}$

La valeur du couple moteur ou de freinage Γ_m est connue.

5. Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique dans un repère Galiléen traduit l'égalité entre le torseur des actions extérieures appliquées au solide et le torseur dynamique du solide.

Nous avons ainsi dans le repère R_0 :

$$\begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_o(S) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_p \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_L \\ \vec{M}_{LO} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_m \\ \vec{\Gamma}_m \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{D} = \vec{R}_p + \vec{R}_L + \vec{R}_m \\ \vec{\delta}_o(S) = \vec{M}_0 + \vec{M}_{LO} + \vec{\Gamma}_m \end{cases}$$

$$-ma(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) = R_{Lx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$ma(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi) = R_{Ly} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$0 = -mg + R_{Lz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\cos\psi + (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\sin\psi = M_{Lx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\sin\psi - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\cos\psi = mga + M_{Ly} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$C\ddot{\psi} = M_{Lz} + \Gamma_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Nous avons 06 équations avec 07 inconnues : $\psi, R_{Lx}, R_{Ly}, R_{Lz}, M_{Lx}, M_{Ly}, M_{Lz}$

Une septième équation sera donnée par la nature physique de la liaison et elle permettra de résoudre le système d'équation complètement.

L'équation (6) permet de déterminer la valeur de ψ et en la remplaçant dans les autres équations on déduit les valeurs de toutes les inconnues.

6. Equilibrage statique et dynamique des rotors et des roues

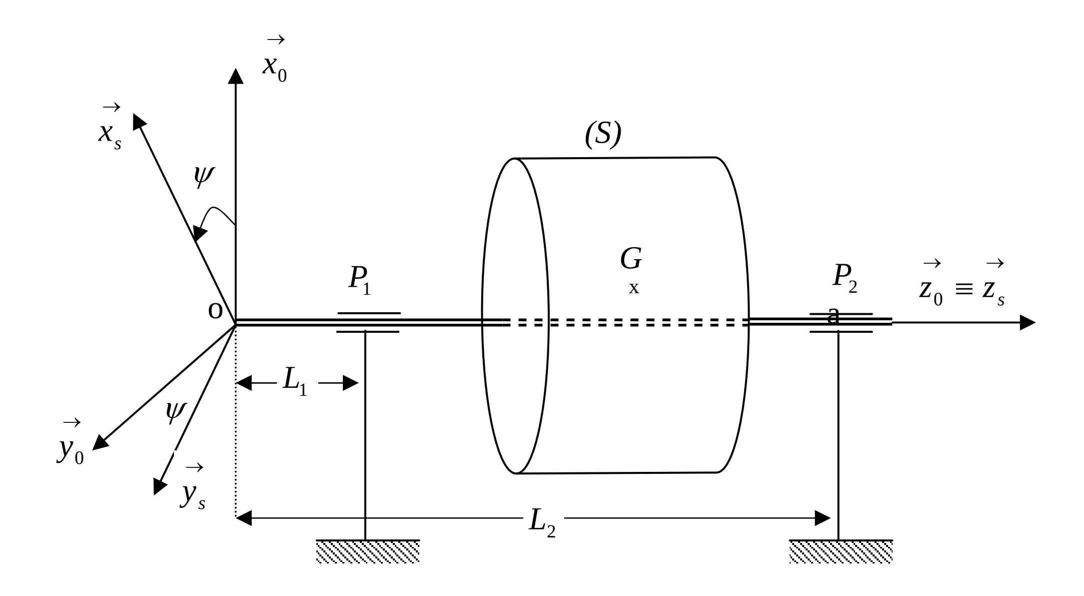
6.1 Mouvements de rotation autour d'un axe fixe d'un solide non équilibré

Soit un rotor ou une roue (S) assimilé à un disque de rayon R et d'épaisseur e. On choisit un repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti fixe. Le rotor (S) est lié au bâti par l'intermédiaire de deux paliers (P_1) et (P_2) de centres respectifs P_1 et P_2 tel que l'axe P_1P_2 soit confondu avec l'axe de rotation $\overrightarrow{Oz_0}$. Pour construire un trièdre direct on considère que l'axe $\overrightarrow{Ox_0}$ est vertical ascendant.

On suppose que le rotor est non équilibré, le centre de masse du rotor n'est pas situé sur l'axe de rotation et ses coordonnées ne sont pas connues au départ.

On choisit un second repère $R_s(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ de même centre O et lié au rotor. Son mouvement de rotation est repéré à chaque instant par un angle $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_s) = (\vec{y}_0, \vec{y}_s)$ avec $\vec{\Omega}_s^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_s = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$ car $\vec{z}_s \equiv \vec{z}_0$.

Le vecteur position du centre de masse du rotor est donné dans le repère $R_s(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ par : $\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{y}_s + c\,\vec{z}_s$



6.2 Etude cinétique du mouvement

La matrice de passage du repère R_s vers le repère R_0 est donnée par :

$$\vec{x}_s = \cos\psi\, \vec{x}_0 + \sin\psi\, \vec{y}_0$$

$$\vec{y}_s = -\sin\psi\, \vec{x}_0 + \cos\psi\, \vec{y}_0$$

$$\vec{z}_s = \vec{z}_0$$

La matrice d'inertie du solide au point O dans la base $R_s(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ est une matrice quelconque de la forme : $I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s}$

Le vecteur position du centre de masse du solide dans cette même base s'écrit :

$$\overrightarrow{OG} = a\,\vec{x}_s + b\,\vec{y}_s + c\,\vec{z}_s$$

La vitesse du centre de masse G se déduit par dérivation de cette expression :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\,\overrightarrow{OG}}{dt} = \frac{d^s\,\overrightarrow{OG}}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\dot{\psi} \\ a\dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} = -b\dot{\psi}\,\vec{x}_s + a\dot{\psi}\,\vec{y}_s$$

Dans la base R_0 le vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{V}^0(G) = -b\dot{\psi}(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0) + a\dot{\psi}(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0)$$

$$\vec{V}^0(G) = -(b\dot{\psi}\cos\psi + a\dot{\psi}\sin\psi)\,\vec{x}_0 + (a\dot{\psi}\cos\psi - b\dot{\psi}\sin\psi)\,\vec{y}_0)$$

Le vecteur accélération s'obtient dans R_s en dérivant encore une fois le vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma}^0(G) = -b\ddot{\psi}\,\vec{x}_s - b\dot{\psi}^2\,\vec{y}_s + a\ddot{\psi}\,\vec{y}_s - a\dot{\psi}^2\,\vec{x}_s = -(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\,\vec{x}_s + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\,\vec{y}_s$$

Dans la base R_0 le vecteur accélération aura pour expression :

$$\vec{\gamma}^0(G) = -\left[(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\cos\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\sin\psi\right]\vec{x}_0$$

$$+\left[-(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\sin\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]\vec{y}_0$$

Le torseur cinétique a pour éléments de réduction dans la base R_s :

La résultante cinétique : $\vec{P} = m\vec{V}^0(G)$

Le moment cinétique : $\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_G + m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}^0(O) = \vec{\sigma}_G = I_O(S)\vec{\Omega}_s^0$

Le torseur dynamique a pour éléments de réduction dans la base R_s :

La résultante dynamique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G)$

$$\vec{D} = -m\left[(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\cos\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\sin\psi\right]\vec{x}_s$$

$$+m\left[-(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\sin\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]\vec{y}_s$$

Le moment dynamique : $\vec{\delta}_0 = \dfrac{d^0\vec{\sigma}_0}{dt} = \dfrac{d^s\vec{\sigma}_0}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{\sigma}_0 = I_O(S)\dot{\vec{\Omega}}_s^0 + \vec{\Omega}_s^0 \wedge I_O(S)\vec{\Omega}_s^0$

$$\vec{\delta}_0 = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\delta}_0 = -E\ddot{\psi}\,\vec{x}_s + D\ddot{\psi}\,\vec{y}_s + C\ddot{\psi}\,\vec{z}_s - D\dot{\psi}^2\,\vec{x}_s - E\dot{\psi}^2\,\vec{y}_s$$

$$\vec{\delta}_0 = (-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\,\vec{x}_s - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\,\vec{y}_s + C\ddot{\psi}\,\vec{z}_s$$

Dans la base R_0, le moment dynamique a pour expression :

$$\vec{\delta}_0 = (-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)(\cos\psi\,\vec{x}_0 + \sin\psi\,\vec{y}_0) - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)(-\sin\psi\,\vec{x}_0 + \cos\psi\,\vec{y}_0) + C\ddot{\psi}\,\vec{z}_s$$

$$\vec{\delta}_0 = \left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\cos\psi + (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\sin\psi\right]\vec{x}_0$$

$$+\left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\sin\psi - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]\vec{y}_0$$

$$+C\ddot{\psi}\,\vec{z}_s$$

6.3 Actions mécaniques extérieures exercées sur le rotor

Les actions mécaniques extérieures exercées sur le rotor sont de trois natures différentes :

- l'action de pesanteur due au poids du rotor ;
- l'action de liaison entre le rotor et le bâti au niveau des paliers ;
- l'action due au couple moteur si le rotor doit être maintenu en mouvement ou au couple de freinage si on doit arrêter le mouvement de rotation.

6.3.1. Action de pesanteur

L'action de pesanteur est représentée par un torseur dont les éléments de réduction sont :

La résultante des actions de pesanteurs : $\vec{R}_p = -mg\,\vec{x}_0$

Le moment résultant de ces actions au point G est nul : $\vec{M}_{Gp} = \vec{0}$, en appliquant la formule de transport dans la base R_0, on déduit le moment au point O : $\vec{M}_{Op} = \vec{M}_{Gp} + \vec{OG} \wedge \vec{R}_p$

$$\vec{M}_{Op} = \begin{pmatrix} a\cos\psi - b\sin\psi \\ a\sin\psi + b\cos\psi \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -mgc\,\vec{y}_0 + mg(a\sin\psi + b\cos\psi)\,\vec{z}_0$$

6.3.2. Action de liaison entre solide et Bâti au niveau du palier (P_1)

L'action de liaison est une force dont la ligne d'action passe par le point P_1 centre du palier.

Cette action est représentée par un torseur dont les éléments de réduction au point O sont :

La résultante de l'action de liaison : $\vec{R}_1 = R_{1x}\,\vec{x}_0 + R_{1y}\,\vec{y}_0 + R_{1z}\,\vec{z}_0$,

Le moment de l'action de liaison en P_1 est nul : $\vec{M}_{P1} = \vec{0}$; en appliquant la formule de transport, on déduit le moment au point O dans la base R_0 : $\vec{M}_{O1} = \vec{M}_{P1} + \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{R}_1$

$$\vec{M}_{O1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{1z} \end{pmatrix} = -L_1 R_{1y}\,\vec{x}_0 + L_1 R_{1x}\,\vec{y}_0$$

6.3.3. Action de liaison entre solide et Bâti au niveau du palier (P_2)

De la même manière que précédemment, l'action de liaison est une force dont la ligne d'action passe par le point P_2 centre du palier.

Cette action est représentée par un torseur dont les éléments de réduction au point O sont :

La résultante de l'action de liaison : $\vec{R}_2 = R_{2x}\,\vec{x}_0 + R_{2y}\,\vec{y}_0 + R_{2z}\,\vec{z}_0$,

Le moment de l'action de liaison en P_2 est nul : $\vec{M}_{P2} = \vec{0}$; en appliquant la formule de transport, on déduit le moment au point O dans la base R_0 : $\vec{M}_{O2} = \vec{M}_{P2} + \overrightarrow{OP_2} \wedge \vec{R}_2$

$$\vec{M}_{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{2z} \end{pmatrix} = -L_2 R_{2y}\,\vec{x}_0 + L_2 R_{2x}\,\vec{y}_0$$

6.3.4. Action du couple moteur

Le couple moteur permet de mettre en mouvement de rotation le rotor ou le maintenir s'il est déjà en mouvement, il est représenté par un torseur dont les éléments de réduction sont :

La résultante des forces motrices : $\vec{R}_m = \vec{0}$

Le moment résultant au point O : $\vec{M}_{Om} = \Gamma_m\,\vec{z}_0$, le moment est porté par l'axe de rotation.

6.3.5. Application des théorèmes généraux de la dynamique au rotor

Le torseur dynamique du rotor est égal à la somme des torseurs des actions extérieures. Cette égalité nous donne les deux équations vectorielles qui donneront les 6 équations scalaires de la dynamique qui décrivent le mouvement du rotor.

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{R}_p + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_m \\ \vec{\delta}_0 = \vec{M}_{Op} + \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O2} + \vec{M}_{Om} \end{cases}$$

Cette égalité se traduit par :

$$-m\left[(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\cos\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\sin\psi\right] = R_{1x} + R_{2x} - mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$m\left[-(b\ddot{\psi} + a\dot{\psi}^2)\sin\psi + (a\ddot{\psi} - b\dot{\psi}^2)\cos\psi\right] = R_{1y} + R_{2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$0 = R_{1z} + R_{2z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\cos\psi + (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\sin\psi\right] = -L_1R_{1y} - L_2R_{2y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\left[(-E\ddot{\psi} + D\dot{\psi}^2)\sin\psi - (D\ddot{\psi} + E\dot{\psi}^2)\cos\psi\right] = -mgc + L_1R_{1x} + L_2R_{2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$C\ddot{\psi} = mg(a\sin\psi + b\cos\psi) + \Gamma_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Comme le couple moteur est connu, la dernière relation qui est l'équation du mouvement permet de déterminer la valeur de ψ en fonction du temps.

Connaissant ψ, les autres variables sont déterminées, notamment les composantes des actions de liaison au niveau des paliers.

Les équations (1), (2), (4), (5) permettent de déduire facilement par multiplication par L_1 ou L_2 et puis soustraction de déterminer les valeurs de :

$$R_{1x} = \frac{1}{L_2 - L_1}\left[-mg(c - L_2) + (E_2\ddot{\psi} - D_2\dot{\psi}^2)\sin\psi + (D_2\ddot{\psi} + E_2\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]$$

$$R_{1y} = \frac{1}{L_2 - L_1}\left[(D_2\ddot{\psi} + E_2\dot{\psi}^2)\sin\psi + (-E_2\ddot{\psi} + D_2\dot{\psi}^2)\cos\psi\right]$$

$$R_{2x} = \frac{1}{L_2 - L_1}\left[mg(c - L_1) + (-E_1 \ddot{\psi} + D_1 \dot{\psi}^2)\sin\psi + (D_1 \ddot{\psi} - E_1 \dot{\psi}^2)\cos\psi \right]$$

$$R_{2y} = \frac{1}{L_2 - L_1}\left[-(D_1 \ddot{\psi} + E_1 \dot{\psi}^2)\sin\psi + (E_1 \ddot{\psi} - D_1 \dot{\psi}^2)\cos\psi \right]$$

avec : $E_1 = E - maL_1$; $E_2 = E - maL_2$; $D_1 = D - mbL_1$; $D_2 = D - mbL_2$

Ces composantes agissant sur l'axe du rotor, dépendent de ψ, $\ddot{\psi}$ mais surtout de $\dot{\psi}^2$ qui peut atteindre des valeurs assez élevées rapidement. Ses actions génèrent des vibrations aux niveaux des paliers, ce qui réduit leur durée de vie et conduisent à une usure prématurée des pièces mécaniques en rotation.

6.3.6. Principe de l 'équilibrage statique et dynamique

Pour éviter ces problèmes d'usure et allonger la durée de vie des paliers et des axes, il faut que les actions aux niveaux des liaisons soient réduites au minimum ou nulles.

Les expressions précédentes montrent que les actions de liaison ont des valeurs minimales lorsque nous avons les conditions suivantes : $\begin{pmatrix} a = b = 0 \\ D = E = 0 \end{pmatrix}$

- $a = b = 0$: implique que le centre de masse du rotor est situé sur l'axe de rotation du rotor. On dit alors que l'on a réalisé l'équilibrage statique. Le rotor a un équilibre statique indifférent.
- $D = E = 0$: les produits d'inertie sont nuls, et l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

Lorsque les deux conditions sont réunies, on dit que l'on a réalisé un équilibrage dynamique.

Dans ce cas les actions de liaisons sont réduites à :

$$R_{1x} = -mg\frac{(c - L_2)}{L_2 - L_1} \quad ; \quad R_{1y} = 0$$

$$R_{2x} = mg\frac{(c - L_1)}{L_2 - L_1} \quad ; \quad R_{2y} = 0$$

En réalité, les machines tournantes, les rotors, les axes, …etc , sont équilibrés lors de la construction, et l'équilibrage est affiné par la suite par ajout de petites masses ponctuelles dans des plans orthogonaux à l'axe de rotation afin de ramener le centre d'inertie de l'ensemble sur l'axe de rotation et d'éliminer les produits d'inertie qui sont la source des vibrations.

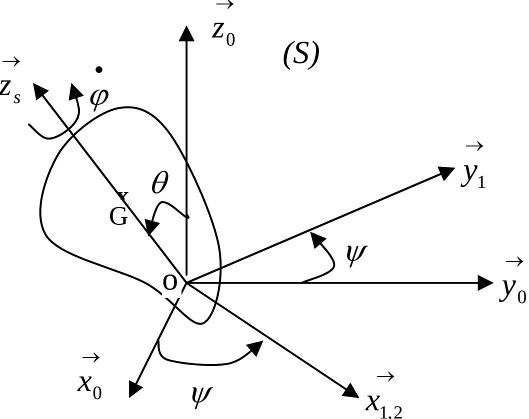
Dans la pratique, lorsqu'une machine tournante fonctionne pendant un certain nombre d'années, elle perd les caractéristiques mécaniques initiales et des vibrations apparaissent. Pour les éliminer, on procède alors à un équilibrage. Celui-ci est réalisé à l'aide d'un système électronique (accéléromètres) permettant de mesurer les accélérations absolues ou relatives de paliers. Le signal électrique enregistré permet par une analyse de relever le spectre vibratoire et déterminer la nature du défaut qui a conduit à la vibration. Des calculs permettent de déterminer les valeurs des paramètres de l'équilibrage.

7. Rotation d'un solide autour d'un point fixe : Angles d'Euler

On considère un repère fixe orthonormé direct $R_O(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et un solide *(S)* fixé au centre O de ce repère. On choisit un repère orthonormé direct $R_s(O,\vec{x}_s,\vec{y}_s,\vec{z}_s)$ lié au solide tel que les axes $\vec{Ox}_s,\vec{Oy}_s,\vec{Oz}_s$ soient des axes principaux d'inertie.

Les axes du repère R_s sont repérés par les angles d'Euler par rapport au repère fixe R_0

Le mouvement instantané du solide est composé de trois rotations exprimées par les angles d'Euler ψ,θ,φ .



- la première rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_1^0=\dot{\psi}\,\vec{z}_0=\dot{\psi}\,\vec{z}_1$ autour de l'axe $\vec{z}_0\equiv\vec{z}_1$ s'appelle : ***la précession du solide ;***
- la seconde rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_2^1=\dot{\theta}\,\vec{x}_1=\dot{\theta}\,\vec{x}_2$ autour de l'axe $\vec{x}_1\equiv\vec{x}_2$ s'appelle : ***la nutation du solide ;***
- la troisième rotation de vitesse angulaire $\vec{\Omega}_s^2=\dot{\varphi}\,\vec{z}_2=\dot{\varphi}\,\vec{z}_s$ autour de l'axe $\vec{z}_2\equiv\vec{z}_s$ s'appelle : ***la rotation propre du solide ;***

La vitesse de rotation instantanée du solide par rapport au repère R_0 est donnée par :

$$\vec{\Omega}_s^0 = \vec{\Omega}_s^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_1 + \dot{\psi}\,\vec{z}_0$$

Son expression dans le repère R_s lié au solide est déjà déterminée en cinématique du solide :

$$\vec{\Omega}_s^0 = \begin{cases} \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \quad ; \quad \text{on pose} \quad \vec{\Omega}_s^0 = \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s}$$

La matrice d'inertie du solide est connue au point O dans le repère $R_s(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$, elle est de la forme : $I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s}$;

Nous traduirons les éléments cinétiques dans la même base.

Le moment cinétique du solide au point O est donné dans le repère R_s par la relation :

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_O(S)\vec{\Omega}_s^0 + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^0(O) = I_O(S)\vec{\Omega}_s^0$$

$$\vec{\sigma}^0(O) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ B\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s}$$

Le moment dynamique se déduit par dérivation :

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(O)}{dt} + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\vec{\delta}^0(O) = I_O(S)\dot{\vec{\Omega}}_1^0 + \vec{\Omega}_s^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{pmatrix} A\dot{\Omega}_{sx} \\ B\dot{\Omega}_{sy} \\ C\dot{\Omega}_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} + \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} \wedge \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ B\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = \left\{ \begin{array}{l} A\dot{\Omega}_{sx} + C\Omega_{sy}\Omega_{sz} - B\Omega_{sy}\Omega_{sz} \\ B\dot{\Omega}_{sy} + A\Omega_{sx}\Omega_{sz} - C\Omega_{sx}\Omega_{sz} \\ C\dot{\Omega}_{sz} + B\Omega_{sy}\Omega_{sx} - A\Omega_{sy}\Omega_{sx} \end{array} \right.$$

R_s

Soient $\delta_{sx}, \delta_{sy}, \delta_{sz}$ les composantes du moment dynamique exprimé dans le repère lié au solide, nous obtenons les équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} A\dot{\Omega}_{sx} + (C-B)\Omega_{sy}\Omega_{sz} = \delta_{sx} \\ B\dot{\Omega}_{sy} + (A-C)\Omega_{sx}\Omega_{sz} = \delta_{sy} \\ C\dot{\Omega}_{sz} + (B-A)\Omega_{sy}\Omega_{sx} = \delta_{sz} \end{cases}$$

Ce système d'équation dépend des angles d'Euler et de leurs dérivées premières et secondes, il est assez difficile de le résoudre dans le cas général. Ces équations ne peuvent trouver solution que dans quelques cas particuliers que nous exposons ici .

- Cas où le moment des forces extérieures, est nul, c'est le cas d'un solide en mouvement de rotation autour de son centre d'inertie. Ce cas est appelé *problème d'Euler-Poinsot.*
- Cas d'un solide ayant un ellipsoïde central d'inertie, c'est à dire le point fixe est situé sur l'axe de révolution et le solide est soumis à la seule force de pesanteur. Ce cas est appelé *problème de Lagrange-Poisson*.
- Cas d'un solide ou l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution :$A= B$ et en plus A =2C. le centre de masse est situé dans le plan équatorial. Ce cas est appelé *problème de Kovalevskaia*.

7.1 Le point fixe O est confondu avec le centre d'inertie G du solide : Cas d'Euler-Poinsot

La seule force appliquée est le poids en G, donc le moment des forces extérieures en ce point est nul, alors le système d'équation s'écrit :

$$\vec{\delta}^0(G) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(G)}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}^0(G) = I_G(S)\vec{\Omega}_s^0 = Cte$$

$$R_s\begin{cases} A\dot{\Omega}_{sx} + (C-B)\Omega_{sy}\Omega_{sz} = 0 \\ B\dot{\Omega}_{sy} + (A-C)\Omega_{sx}\Omega_{sz} = 0 \\ C\dot{\Omega}_{sz} + (B-A)\Omega_{sy}\Omega_{sx} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{\sigma}^0(G) = I_G(S)\vec{\Omega}_s^0 = Cte \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ B\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = Cte$$

Le moment cinétique est constant donc son module est aussi constant, on a alors:

$$A^2\Omega_{sx}^2 + B^2\Omega_{sy}^2 + C^2\Omega_{sz}^2 = Cte$$

Le centre d'inertie du solide est un point fixe donc son énergie potentielle $E_p = E_{p0}$ reste constante. Comme le champ des forces est conservatif nous pouvons écrire : $E_c + E_p = E_c + E_{p0}$

L'énergie cinétique du solide est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T} I_G(S)\vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}\left(\Omega_{sx}, \Omega_{sy}, \Omega_{sz}\right) \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s} \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s} = Cte$$

d'où $A\Omega_{sx}^2 + B\Omega_{sy}^2 + C\Omega_{sz}^2 = Cte$

Les composantes de la vitesse de rotation $\left(\Omega_{sx}, \Omega_{sy}, \Omega_{sz}\right)$ en fonction du temps, sont connues car elles sont solutions du système d'équations précédentes.

Pour trouver la valeur des angles d'Euler en fonction du temps, on choisit l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ comme étant l'axe du moment cinétique $\vec{\sigma}^0(G)$, alors il sera parallèle à $\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$; on peut alors écrire : $\vec{\sigma}^0(G) = \lambda\,\vec{z}_0$ or nous pouvons exprimer le vecteur $\vec{z}_0$ dans le repère R_s par les matrices de passage :

$$\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{R_s}$$

$$\vec{\sigma}^0(G) = \begin{bmatrix} \lambda \sin\theta \sin\varphi \\ \lambda \sin\theta \cos\varphi \\ \lambda \cos\theta \end{bmatrix}_{R_s} \quad \text{or nous avons aussi } \vec{\sigma}^0(G) = \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ B\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_s}$$

d'où : $\begin{cases} A\Omega_{sx} = \lambda \sin\theta \sin\varphi & (1) \\ B\Omega_{sy} = \lambda \sin\theta \cos\varphi & (2) \\ C\Omega_{sz} = \cos\theta & (3) \end{cases}$

Le rapport entre l'équation (2) et (1) donne : $\varphi = arctg \dfrac{A\Omega_{sx}}{B\Omega_{sy}}$

L'équation (3) donne : $\theta = ar\cos \dfrac{C\Omega_{sz}}{\lambda}$

Nous pouvons aussi déduire la vitesse de précession à partir des composantes du vecteur rotation instantané du solide (S) par rapport au repère R_0.

7.2 Le point fixe O est sur l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie G : Cas de Lagrange-Poisson

Le solide a une symétrie de révolution *(A= B)* , alors le tenseur est le même dans la base R_s liée au solide et dans la base intermédiaire R_2. De plus le centre d'inertie **G** du solide est situé sur le même axe que le point O tel que $\overrightarrow{OG} = L\,\vec{z}_2$. Les seules actions extérieures agissant sur le solide sont les actions de pesanteur.

Le tenseur d'inertie en O s'écrit : $I_O(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_s} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2}$

Nous exprimerons tous les calculs dans le repère R_2.

Dans ce repère, la vitesse instantanée de rotation du solide par rapport au repère R_0 aura pour expression :

$$\vec{\Omega}_s^0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_2}$$

Le moment cinétique par rapport au point fixe O est égal à :

$$\vec{\sigma}^0(O) = I_O(S)\vec{\Omega}_s^0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ A\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_2}$$

Le moment dynamique est déduit à partir de la dérivée du moment cinétique :

$$\vec{\delta}^0(O) = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(O)}{dt} = \frac{d^0\vec{\sigma}^0(O)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O) = \frac{d^0(I_O(S)\vec{\Omega}_s^0)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$$\vec{\delta}^0(O) = I_O(S)\dot{\vec{\Omega}}_s^0 + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(O)$$

$\vec{\Omega}_2^0$: est la vitesse du repère R_2 par rapport au repère R_0 , il est donné par :

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 \quad , \quad \vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^0$$

on déduit : $$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_3^0 - \vec{\Omega}_3^2 = \vec{\Omega}_3^0 - \dot{\varphi}\vec{z}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{bmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} - \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_{sx} \\ \dot{\Omega}_{sy} \\ \dot{\Omega}_{sz} \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} \Omega_{sx} \\ \Omega_{sy} \\ \Omega_{sz} - \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} A\Omega_{sx} \\ A\Omega_{sy} \\ C\Omega_{sz} \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(O) = \begin{cases} A\dot{\Omega}_{sx} + (C-A)\Omega_{sy}\Omega_{sz} + A\dot{\varphi}\Omega_{sy} \\ A\dot{\Omega}_{sy} + (A-C)\Omega_{sx}\Omega_{sz} - A\dot{\varphi}\Omega_{sx} \\ C\dot{\Omega}_{sz} \end{cases}_{R_2}$$

Le moment des actions extérieures est donné par :

$$\vec{M}_{ext}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$$

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_2}$; $m\vec{g} = \begin{cases} 0 \\ -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{M}_{ext}(O) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} 0 \\ -mg\sin\theta \\ -mg\cos\theta \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} mgL\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2}$$

L'égalité entre le moment dynamique et le moment des actions extérieures donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} A\dot{\Omega}_{sx} + (C-A)\Omega_{sy}\Omega_{sz} + A\dot{\varphi}\Omega_{sy} = mgL\sin\theta \\ A\dot{\Omega}_{sy} + (A-C)\Omega_{sx}\Omega_{sz} - A\dot{\varphi}\Omega_{sx} = 0 \\ C\dot{\Omega}_{sz} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation montre que nous avons une intégrale première donnée par :

$$\dot{\Omega}_{sz} = 0 \text{ d'où : } \Omega_{sz} = \text{Cte} \Leftrightarrow \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = K = Cte$$

Une deuxième équation provient du fait que nous avons un champ de force conservatif, ce qui se traduit par la conservation de l'énergie totale : $E_C + E_P = Cte$

L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_s^{0T} I_O(S)\vec{\Omega}_s^0 = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_s^{0T} \bullet \vec{\sigma}_0(S)$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right) + C\left(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta\right) + CK^2\right]$$

L'énergie potentielle s'écrit :

$E_P = mgL\cos\theta$

on a alors : $\frac{1}{2}\left[A\left(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta\right)+CK^2\right]+mgL\cos\theta = Cte$

A l'aide ces deux intégrales premières nous pouvons déduire l'expression de $\dot{\psi}$ et déduire par la suite celle de $\dot{\theta}$ en choisissant la direction du moment dynamique suivant l'axe $\vec{z}_0$.

8. L'effet gyroscopique

Un solide à symétrie de révolution (Toupie) ayant une vitesse de rotation autour de son axe, très élevée est appelé gyroscope. Sa grande vitesse de rotation (rotation propre) permet de simplifier les équations et faire des approximations afin de déterminer des relations avec la vitesse de rotation de précession et de nutation.

8.1 L'approximation gyroscopique

On dit qu'un solide à symétrie de révolution, satisfait à l'approximation gyroscopique lorsque sa vitesse de rotation propre est très grande devant la vitesse de nutation et de précession.

$\dot{\varphi} >> \dot{\psi}$ et $\dot{\varphi} >> \dot{\theta}$

Dans ce cas la vitesse de rotation du solide est portée par un axe (Δ) défini par : $(O, \vec{e}_\Delta)$

Tel que : $\vec{\Omega}_\Delta = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\Delta$; où $\dot{\varphi}$: est la vitesse de rotation propre

8.2 Couple gyroscopique appliqué à une toupie (Règle de Foucault)

On applique le théorème du moment cinétique au point O à une toupie de masse m , de centre d'inertie G ayant un axe de révolution (Δ) et soumise à la seule force de pesanteur due à son propre poids. Le moment dynamique de la toupie qui est la dérivée du moment cinétique est égal au moment des actions extérieures. Dans ce cas la seule action extérieure est due au poids de la toupie, on obtient alors la relation :

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_0(S)}{dt} = \vec{M}_{0\,Fext} = \vec{OG}\wedge m\vec{g}$$

Dans l'approximation gyroscopique, le vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_0(S)$ a un module constant et sa direction est portée par l'axe (Δ) .

La dérivée $\dfrac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt}$ correspond en fait à la vitesse de l'extrémité du vecteur moment cinétique dans son mouvement de rotation autour de l'axe fixe $\vec{z}_0$ à une vitesse angulaire de précession : $\vec{\Omega}_{prec} = \dot{\psi}\,\vec{z}_0$, qui se traduit par la relation :

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt} = \vec{\Omega}_{prec} \wedge \vec{\sigma}_0(S) = \vec{\Omega}_{prec} \wedge I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta$$

I_Δ : est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.

On déduit : $\vec{\Omega}_{prec} \wedge I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g}$ qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$$

On défini ainsi le couple gyroscopique qui a pour expression :

$$\overrightarrow{M}_{Gyros} = I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} = \vec{\sigma}_0(S) \wedge \vec{\Omega}_{prec}$$

Nous avons alors à chaque instant l'égalité : $\overrightarrow{M}_{Gyros} + \overrightarrow{M}_{Fext} = \vec{0}$

On déduit alors une relation entre la vitesse de rotation propre et la vitesse de rotation de précession en développant la relation : $I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$

$$I_\Delta \dot{\varphi}\,\vec{e}_\Delta \wedge \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + a\,\vec{e}_\Delta \wedge -mg\,\vec{z}_0 = \vec{0}$$

$$I_\Delta \dot{\varphi}\dot{\psi}(\vec{e}_\Delta \wedge \vec{z}_0) - mga(\vec{e}_\Delta \wedge \vec{z}_0) = \vec{0}$$

$$(I_\Delta \dot{\varphi}\dot{\psi} - mga)(\vec{e}_\Delta \wedge \vec{z}_0) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad I_\Delta \dot{\varphi}\dot{\psi} - mga = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{mga}{I_\Delta \dot{\varphi}}$$

Le résultat ci dessus montre que si la rotation propre est assez grande, la nutation est négligeable et la précession pratiquement uniforme, elle s'effectue avec une vitesse angulaire inversement proportionnelle à la vitesse de rotation propre.

Lorsqu'un gyroscope est soumis à une rotation imposée, il réagit en créant un couple gyroscopique et adoptant une rotation qui envoie l'axe du gyroscope s'aligner sur l'axe de la rotation imposé.
Plus simplement, on peut dire que l'axe du gyroscope tend, en empruntant le plus court chemin, à s'aligner sur l'axe du vecteur du moment extérieur du aux actions extérieures.

Dans le cas de l'approximation gyroscopique, deux cas peuvent se présenter :

a) Si le moment des actions extérieures est nul, l'axe du gyroscope garde une direction

constante : $\overrightarrow{M}_{0\,Fext} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{d^0 \vec{\sigma}_0(S)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_0(S) = Cte$;

b) Si $\overrightarrow{M}_{0\,Fext} = M\,\vec{y}_0$ alors : $I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \vec{\Omega}_{prec} + \overrightarrow{M}_{0\,Fext} = \vec{0} \Rightarrow I_\Delta \vec{\Omega}_\Delta \wedge \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + M\,\vec{x}_0 = \vec{0}$

$\vec{\Omega}_\Delta$: doit être porté par l'axe $\vec{x}_0$ pour que l'équation puisse avoir une solution.

$$I_\Delta \dot{\varphi}\,\vec{x}_0 \wedge \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + M\,\vec{y}_0 = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad -I_\Delta \dot{\varphi}\dot{\psi} + M = 0 \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{I_\Delta \dot{\psi}}$$

Ce phénomène s'appelle effet gyroscopique.

En d'autre terme pour un gyroscope ayant une rotation propre élevée, si vous appliquer une action sur l'armature pour obtenir une précession, vous faites apparaître la nutation. Pour un gyroscope à cardan cela signifie que si vous lui donner du ψ , il vous donnera du θ.